



## **IV Международная молодежная научная школа-конференция**

**"Теория и численные методы решения  
обратных и некорректных задач"**

# **ТЕЗИСЫ**

**Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН  
Институт математики имени С.Л. Соболева СО РАН  
Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН  
Новосибирский государственный университет  
при поддержке  
Института вычислительных технологий СО РАН,  
Института гидродинамики имени М.А. Лаврентьева СО РАН,  
Института теоретической и прикладной механики имени С.А. Христиановича СО РАН,  
Института цитологии и генетики СО РАН, Института катализа имени Г.К. Борескова СО  
РАН, РФФИ (№ 12-01-06060-г, № 12-01-06821-моб\_г),  
Конструкторско-технологического института вычислительной техники СО РАН,  
НОК НГУ «Математическое моделирование и обратные задачи естествознания»,  
компаний Shlumberger, Baker Hughes, Intel, Автмотив**

**Новосибирск, Академгородок,  
5–15 августа 2012 г.**

## **Международный программный комитет**

**Председатели: акад. РАН Б. Г. Михайленко,  
чл.-кор. РАН В. Г. Романов, чл.-кор. РАН С. И. Кабанихин,  
проф. А. Г. Ягола**

акад. Б. Д. Аннин, акад. С. К. Годунов, акад. Н. А. Колчанов, акад. А. Н. Конавалов, акад. И. А. Тайманов, акад. В. М. Фомин, акад. Ю. И. Шокин, акад. М. И. Эпов, чл.-кор. РАН Л. А. Большов, чл.-кор. РАН В. В. Васин, чл.-кор. РАН С. С. Гончаров, чл.-кор. РАН П. В. Логачев, чл.-кор. РАН Д. М. Маркович, чл.-кор. РАН В. В. Пухначев, чл.-кор. РАН А. М. Федотов, проф. Н. Т. Banks, проф. А. Hasanoglu, проф. Y. F. Wang, проф. Ю. Е. Аниконов, проф. Д. С. Аниконов, проф. М. А. Бектемесов, проф. М. И. Белишев, проф. Ю. Я. Белов, проф. В. С. Белоносов, проф. А. Л. Бухгейм, проф. А. Ф. Воеводин, проф. Ю. М. Волчков, проф. В. П. Голубятников, проф. С. К. Голушко, проф. И. Е. Егоров, проф. И. Н. Ельцов, проф. Г. Н. Ерохин, проф. Н. Г. Загоруйко, канд. техн. наук Ю. М. Зыбарев, проф. В. П. Ильин, проф. К. Т. Искаков, д-р физ-мат. наук А. Л. Карчевский, проф. M. V. Klibanov, проф. А. И. Кожанов, проф. М. Ю. Кокурин, проф. И. В. Коптюг, проф. М. М. Лаврентьев-мл., проф. Ю. М. Лаевский, д-р физ-мат. наук Ан.Г. Марчук, проф. Л. А. Назарова, проф. В. В. Пененко, проф. В. В. Пикалов, канд. физ.-мат. наук Н. Л. Подколотный, проф. И. В. Прохоров, проф. К. К. Сабельфельд, канд. физ.-мат. наук В. Н. Снытников, проф. Т. А. Сушкевич, проф. М. П. Федорук, проф. М. В. Фокин, проф. А. И. Хисамутдинов, д-р физ-мат. наук В. А. Чеведа, проф. А. П. Чупахин, проф. Д. А. Шапиро, канд. физ.-мат. наук М. А. Шишленин, проф. Э. П. Шурина

## **Организационный комитет**

**Председатель – М. А. Шишленин**

К. Т. Искаков – зам. председателя, Н. Л. Подколотный – зам. Председателя, Х. Х. Имомназаров – зам. председателя, А. А. Дучков – зам. председателя, А. В. Пененко – зам. председателя, О. И. Криворотько – ученый секретарь, Д. А. Воронов, В. Н. Глинских, Н. Ю. Зятьков, А. Л. Карчевский, И. М. Куликов, И. Н. Медведев, Д. В. Нечаев, Н. С. Новиков, Э. А. Пянова, А. Г. Усов, И. Г. Черных, М. А. Юрченко

**DOUBLY DEGENERATE PARABOLIC EQUATIONS  
WITH NONSTANDARD GROWTH:  
EXISTENCE, LOCALIZATION AND BLOW-UP**

Antontsev S.N., Shmarev S.I.<sup>1</sup>

*CMAF, University of Lisbon, Lisbon, Portugal*

<sup>1</sup> *University of Oviedo, Oviedo, Spain*

*antontsevsn@mail.ru, shmarev@uniovi.es*

We study the homogeneous Dirichlet problem for the doubly degenerate parabolic equations with anisotropic and variable nonlinearity:

$$\frac{d}{dt} \left( |v|^{m(x,t)-1} v \right) = \sum_{i=1}^n D_i \left( a_i |D_i v|^{p_i(x,t)-2} D_i v \right) + b |v|^{\sigma(x,t)-2} v + g \quad \text{in } Q_T, \quad (1)$$

The exponents of nonlinearity  $m(x,t) > 0$ ,  $p_i(x,t) > 1$  and  $\sigma(x,t) > 1$  are given functions of their arguments. The following issues are discussed.

- *Existence of strong solutions.* It is shown that under certain conditions on the data and the exponents of nonlinearity problem (1) admits a solution in a variable Sobolev space. For strong solutions  $\sqrt{|v|^{m(x,t)-1}} v_t \in L^2(Q)$ .
- *Extinction in a finite time and long-time behavior.* We establish relations between the exponents  $m$ ,  $p_i$  and  $\sigma$  which guarantee that every solution vanishes in a finite time. In case that the solution exists globally in time, the decay rates as  $t \rightarrow \infty$  are obtained.
- *Finite time blow-up.* It is proved that in the special cases when the exponents  $m$ ,  $p_i$ ,  $\sigma$  are either independent of  $t$ , or their derivatives with respect to  $t$  are small, the solutions blow-up in a finite time.

Part of the results was published in [1,2,3]. The authors acknowledge the support of the Research Projects PTDC/MAT/110613/2009, FCT (Portugal), MTM2011-26119 and MTM2010-18427, MICINN (Spain).

REFERENCES

1. *Antontsev S. and Shmarev S.* Blow-up of solutions to parabolic equations with non-standard growth conditions // J. Comput. Appl. Math. 2010. V. 234. P. 2633–2645.
2. *Antontsev S. and Shmarev S.* Vanishing solutions of anisotropic parabolic equations with variable nonlinearity // J. Math. Anal. Appl. 2010. V. 361. P. 371–391.
3. *Antontsev S. and Shmarev S.* Parabolic equations with double variable nonlinearities // Math. Comput. Simul. 2011. V. 81. P. 2018–2032.

**WEAKLY ILL-POSED INTEGRAL GEOMETRY PROBLEMS  
ON A PLANE AND IN A THREE-DIMENSIONAL SPACE**

Begmatov A.H.

*Novosibirsk state technical university, Novosibirsk**akbar\_begmatov@mail.ru*

Let  $x \in R^n, \xi \in R^n$  ( $n = 1, 2$ ),  $y \in R$ . Let us consider a family of manifolds  $\{S(x, y)\}$ , which are uniquely parametrized by their vertices  $(x, y)$ . Suppose that about a function  $u(x, y)$  we know the integrals

$$\iint_{S(x,y)} g(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) ds = f(x, y). \quad (1)$$

On the basis of the function  $f(x, y)$  it is required to find the function  $u(x, y)$ .

The problem of solving the equation (1) is the problem of integral geometry [1]. Uniqueness theorems for a solution to the problem were obtained in [2].

In the present work, we study the question of distinguishing classes of weakly ill-posed integral geometry problems. We prove a uniqueness theorem for a solution to equation (1). We obtain stability estimates for solution to the problem in spaces of finite smoothness, thereby demonstrating weak ill-posedness of the problem. We also construct a representation for a solution.

This work was partly supported by the Ministry of Education and Science of Russian Federation under grant No 16.740.11.0057.

## REFERENCES

1. *Laurent'ev M.M., Romanov V.G. and Shishtskii S.P.* Ill-posed problems of mathematical physics and analysis. AMS, Providence, Rhode Island, 1986.
2. *Begmatov A.H.* The uniqueness of a solution to a Volterra-type integral geometry problem in the plane // *Doklady Mathematics*, 2009. V. 80, N 1. P. 528-530.

**COMPERATIVE ANALYSIS OF NUMERICAL METHODS  
FOR CALCULATING CRITICAL PARAMETERS  
OF FRACTAL LATTICES**

Bondarenko A.N., Gunkin A.Y.<sup>1</sup>

*Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of  
Russian Academy of Sciences, Novosibirsk*

<sup>1</sup> *Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk  
bondarenkoan1953@mail.ru, shamrock24@mail.ru*

The work is devoted to the study of numerical algorithms effectiveness for calculating the critical parameters of the Ising model on fractal lattices. The Energy of  $\sigma$ -system configuration of the Ising model is defined as

$$E(\sigma) = -J \sum_{(x,y)} \sigma_x \sigma_y - H \sum_x \sigma_x, \quad (1)$$

where  $(x, y)$  is all pairs of neighboring sites;  $J$  is the energy of interaction;  $H$  is an external magnetic field.

Average energy  $\langle E \rangle$  and average magnetization  $\langle M \rangle$  are calculated via  $E(\sigma)$ , at zero external magnetic field  $H$ . The comparison of the accuracy of Monte-Carlo class algorithms is based on these averages.

In order to calculate  $E(\sigma)$ , we use the following numerical methods: single-spin Metropolis algorithm [1], also known as Monte-Carlo algorithm; Swenson-Wang cluster algorithm [2]; and Wolff's single cluster algorithm [3].

The implemented software package allows us to carry out the comparative analysis of methods accuracy as well as to compare time and computational cost of these methods.

Based on our computer research it was concluded that each of the algorithms is suitable for calculations on a lattice of its own type.

The peculiarity of this paper is the fact that the comparative analysis of the methods was carried out for fractal lattices.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 11-01-00105 a) and Interdisciplinary Integration Project of SB RAS N 14, "Inverse Problems and Applications: Theory, Algorithms, and Programs".

REFERENCES

1. *Gould H., Tobochnik J.* Introduction to computer simulation methods, applications to physical system, 2/E // Addison-Wesley, 1995. P. 721.
2. *Swendsen R.H., Wang J.-S.* Nonuniversal critical dynamics in Monte Carlo simulations // Phys. Rev. Lett. 1987. N. 58. P. 86-88.
3. *Wolff U.* Lattice field theory as a percolation process // Phys. Rev. Lett. 1988. N. 60. P. 1461-1463.

**INVERSE SCATTERING PROBLEM**

Bukhgeym A.L.

*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia;  
and Wichita State University, USA.**E-mail: bukgeym@math.wichita.edu*

We present new algorithms for recovering the coefficients of elliptic operators based on their scattering data. These results are some generalizations of methods developed in [1].

**REFERENCES**

1. *Bukhgeim A.L.* Recovering a potential from Cauchy data in the two-dimensional case // J. Inv. Ill-Posed Problems. V. 16, N 1. 2008. P. 19–33.

**ON A SHAPE DESIGN PROBLEM  
FOR ONE SPECTRAL FUNCTIONAL**

Gasimov Y. S.

*Institute of Applied Mathematics, Baku State University, Baku, Azerbaijan  
ysfgasimov@yahoo.com*

In the work we deal with the eigenvalue problem for the elliptic operator with variable domain. The object under investigation is a functional involving eigenvalue of this operator. The formulae for the first variation of the functional with respect to domain is derived. Then a necessary condition for the optimal shape is obtained. Explicit formulas are obtained for the eigenvalues in the optimal domain for some particular cases.

Consider the problem

$$-\Delta u + q(x)u = \lambda u, \quad x \in D, \quad (1)$$

$$u(x) = 0, \quad x \in S_D, \quad (2)$$

where  $\Delta$  – Laplace operator,  $q(x)$  – non-negative differentiable function,  $D$  – convex bounded domain from  $R^n$ ,  $S_D$  – its boundary. Suppose that the potential satisfies the condition  $q(x) = \frac{1}{l^2}q(x)$ ,  $x \in D$ , and consider the functional

$$J(\lambda_1(D)) = F(\lambda_1(D)) + G(mesD), \quad (3)$$

where  $F$ ,  $G$  are differentiable functions,  $\lambda_1(D)$  is the first eigenvalue of the problem (1)–(2) in the domain  $D$ . Let  $K = \{D \in E^n : \bar{D} \in K_0, S_D \in C^2\}$ , where  $K_0$  is some set of convex bounded domains from  $R^n$ .

The object under consideration is the minimization problem

$$\min \{J(\lambda_1(D)) : D \in K\}. \quad (4)$$

Using the results from [1] for the optimal domain  $D$  we obtain the condition

$$2F'(\lambda_1(D))\lambda_1(D) = nG'(mesD)mesD.$$

From this some particular cases may be obtained.

a) In two dimensional case  $n = 2$

$$F'(\lambda_1(D))\lambda_1(D) = G'(mesD)mesD.$$

b) If the function  $F$  satisfies the condition  $F'(\lambda(D)) = 1$ , then

$$\lambda_1(D) = \frac{n}{2}G'(mesD)mesD.$$

c) If the function  $G$  satisfies the condition  $G'(mesD) = 1$ , then

$$\lambda_1(D) = \frac{nm esD}{2F'(\lambda(D))}.$$

d) If the functions  $F$  and  $G$  satisfy the condition  $G'(mesD) = 1$ ,  $F'(\lambda(D)) = 1$ , simultaneously, then

$$\lambda_1(D) = \frac{n}{2}mesD.$$

The work is supported by Azerbaijan Science Development Foundation (grant N EIF-2011-1(3-82)/25/1-M-29).

#### REFERENCES

1. *Gasimov Y.S.* Some shape optimization problems for the eigenvalues // J. Phys. A: Math. Theor. 2008. **41**, N 5. P. 521–529.

---

**3D VECTOR TOMOGRAPHY  
AND SINGULAR VALUE DECOMPOSITION**

Kazantsev S.G.

*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk*

*kazan@math.nsc.ru*

Singular value decomposition (SVD) is an important analytical and computational tool in connection with regularization of inverse problems. We derive an analytic singular value decomposition of the longitudinal ray transform both for non-weighted and weighted functional spaces.

**BOUNDARY INTEGRAL SIMULATIONS OF DEFORMATION OF VISCOUS AND VISCOPLASTIC DROPS IN LINEAR FLOW**Lavrenteva O.M., Smagin I., Zabaranin M.<sup>1</sup>, Nir A.*TECHNION - Israel Institute of Technology, Haifa, Israel*<sup>1</sup>*Stevens Institute of Technology, Hoboken, USA**ceolga@techunix.technion.ac.il*

The slow dynamic deformation of viscous and viscoplastic drops uni- and biaxial extensional flow is simulated making use of a variation of integral equation method BI presentation previously employed in [1-2]. The Green function for the Stokes equation is used and the non-Newtonian stress is treated as a source term. Integration over the outer unbounded domain occupied by the Newtonian liquid, is eliminated by satisfying the boundary condition at using the integral expressions for the adjoined domains. Thus, the problem is reduced to an integral equation in a bounded domain, which reduction is the main advantage of this method.

The dynamic shapes are obtained for a variety of capillary numbers, Bingham numbers and viscosity ratio. For established shapes, several approximate analyses and results are presented and compared. The critical capillary number, below which a steady drop shape exists, is established for each case. Exact analytic solutions are obtained for oblate spheroidal drops employing conformal mapping techniques. For the case of Newtonian drops with viscosity equal to that of the external fluid we employ the integral equation suggested [3], where the steady shapes are expressed in terms of Chebyshev polynomials. Similarity to and difference from the deformation of a drop in axisymmetric extensional flow are discussed. It was found that spheroidal approximation is valid for the shape of the drop in a uni-axial extensional flow for the entire range of capillary numbers. For the drop under a bi-axial extension the situation is different: While at relatively low capillary number the drop shape resembles that of an oblate spheroid, for capillary numbers close to the critical one the deformed drop assumes the shape of a flat disk with rounded edge.

## REFERENCES

1. *Toose E.M., van den Ende D., Geurts B.J., Kuerten J.G.M., Zandbergen P.J.* Axisymmetric non-Newtonian drops treated with a boundary integral method // *J. Eng. Math.* 1996. N 30. P. 131-150.
2. *Smagin I., Pathak M., Lavrenteva O.M., Nir A.* Motion and shape of an axisymmetric viscoplastic drop slowly falling through a viscous fluid // *Rheologica Acta.* 2011. N 50 (4). P. 361-374.
3. *Zabaranin M. and Nir A.* Generalized Analytic Functions in an Extensional Stokes Flow with a Deformable Drop // *SIAM J. Appl. Math.* 2011. N 71 (4). P. 925-951.

**SOME FEATURES OF USING PARALLEL COMPUTING  
FOR SOLVING MULTIDIMENSIONAL ILL-POSED PROBLEMS**

Lukyanenko D.V.

*Department of Mathematics, Faculty of Physics,**Lomonosov Moscow State University, Moscow**lukyanenko@physics.msu.ru*

Solving multidimensional ill-posed problems has attracted wide interests and found many practical applications. However, the most modern applications require processing a large amount of data that is often very difficult to perform on personal computers. In this case usual different methods are applied for simplification of the problem statement but these simplifications degrade the accuracy of the inverted parameters. It was shown [1, 2] by way of example of solving multidimensional Fredholm integral equation of the 1st kind that using parallel computing gives us an advantage the time and accuracy. Nevertheless, when we are able to use supercomputers at our usual scientific researches and able to process a huge amount of data we can encounter another problem – a round-off error that grows with increasing amounts of computations can significantly affect the final result of calculations.

Several recent results will be presented on the study of this problem.

The work was partially supported by RFBR grant 11-01-00040-a and 12-01-91153-NSFC-a. For testing calculations were used Computing Cluster of the Moscow State University.

**REFERENCES**

1. *Lukyanenko D.V., Yagola A.G.* Application of multiprocessor systems for solving three-dimensional Fredholm integral equations of the first kind for vector functions // Numerical Methods and Programming. 2010. V. 11. P. 336-343 (in Russian).
2. *Lukyanenko D.V., Yagola A.G., Evdokimova N.A.* Application of inversion methods in solving ill-posed problems for magnetic parameter identification of steel hull vessel // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2011. V. 18, N 9. P. 1013-1029.

**2D AND 3D INVERSE PROBLEMS  
FOR VISCOELASTICITY EQUATIONS**

Romanov V.G.

*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk**romanov@math.nsc.ru*

Inverse problems for integro-differential equations of viscoelasticity are considered in 2D and 3D statements. In the 2D variant, the inverse problem consists in a determination of a density, shear modulus and a space part of a kernel of an integral operator of the equation. A series of the direct Cauchy problems with zero initial data and impulse plane sources are considered and solutions to these problems are supposed to be given on a boundary of a disc for a sufficiently large finite time interval  $[0, T]$ . Corresponding data are used to solve the inverse problem, i.e. to determine the unknown variable parameters of a medium inside of the disc. It is demonstrated that the original inverse problem can be reduced to 3 more simple inverse problems that can be solved one after another. Stability estimates of solutions are given.

In the 3D statement, a similar problem is considered under the assumption that a density is given, so unknown functions are elastic moduli and space parts of two kernels of integral operators of viscoelasticity equations. In this case instead of impulse plane sources a series of impulse point sources are used. The solutions of corresponding direct problems are given on the boundary of a compact domain  $\Omega$  for a sufficiently large finite time interval  $[0, T]$ . This information is used to find uniquely unknown functions inside  $\Omega$ .

The work was supported by the Russian Foundation of Basic Research (grant No 11-01-00105-a), the Siberian Division of RAS (grant No SB RAS – 2012 – No 14) and by the Visby Program.

## REFERENCES

1. *Romanov V.G.* Two-dimensional inverse problem for viscoelasticity equations // *Sibirskii Mat. Zh.* 2012 (submitted).
2. *Romanov V.G.* A problem of determining kernel in viscoelasticity equations // *Doklady Akademii Nauk.* 2012 (submitted).
3. *Romanov V.G.* A three-dimensional inverse problem of viscoelasticity // *Doklady Akademii Nauk*, 2011. V. 441, N. 4. P. 452-455. English transl. in *Doklady Mathematics*, 2011. V. 84, N. 3. P. 833-836.

## INVERSE SOURCE PROBLEM FOR WAVE EQUATION

Shishlenin M.A.

*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk*

*mshishlenin@ngs.ru*

We consider the problem of source reconstruction by inversion of records known at a set of tide receivers. Such kind of problems arise in tsunamis, seismic and so on.

Let us consider the following problem in the domain  $(x, y) \in \Omega \in \mathbb{R}^2$ :

$$u_{tt} = \nabla(c^2(x, y)\nabla u); \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = q(x, y); \quad (2)$$

$$u_t|_{t=0} = 0; \quad (3)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4)$$

Here  $c(x, y)$  is the velocity of wave propagation.

*Forward problem* (1)–(4) is to find function  $u(x, y, t)$  by known functions  $q(x, y)$  and  $c(x, y)$ .

Let us consider the *inverse problem*: find the source function  $q(x, y)$  from (1)–(4) by known additional information about the forward problem solution (1)–(4):

$$u(x_i, y_i, t) = f_i(t), \quad i = \overline{1, M}. \quad (5)$$

In [1] it was shown that operator which maps  $q(x, y)$  into  $f_i(t)$  is a compact operator. In [2] it was proved the unique existence of the solution of the one-dimensional inverse problem.

We reduce the discrete inverse problem (1)–(5) to the system of linear algebraic equations

$$Aq = f.$$

We apply SVD analysis [3] for inverse problem solution. The *a priori* information (Godunov's approach [3]) is used for localization source of acoustic waves. The numerical results are presented.

The work was supported by RFBR, grant N 11-01-00105 and by Federal Target Grant "Scientific and educational personnel of innovation Russia" for 2009-2013 (government contract N 14.740.11.0350).

### REFERENCES

1. *Voronina T.* Determination of spatial distribution of oscillation sources by remote measurements on a finite set of points // *Sib. J. Calc. Math.* 2004. N 3. P. 203–211.
2. *Romanov V.G., Moshkalev P.S.* The one-dimensional inverse problem of finding a tsunami source // *Inverse and Ill-Posed Problems.* 2011. V. 14, No. 3. P. 87–99.
3. *Godunov S.K. and others* Guaranteed accuracy in numerical linear algebra. N. Y.: Springer-Verlag, 1993.

## NON-REFLECTING BOUNDARY CONDITION ON ELLIPSOIDAL BOUNDARY

Tordeux S.

*Projet Magique 3D, INRIA Bordeaux Sud-Ouest and LMA - UMR CNRS 5142,*

*Pau University*

*sebastien.tordeux@inria.fr*

In the context of time-harmonic linear acoustic wave propagation, a classical problem consists in considering the scattering by an impenetrable bounded rigid body  $\Omega' \subset \mathbb{R}^3$  with regular boundary. In the complement  $\Omega$  of  $\Omega'$ , the phasor of the pressure field  $u_{\text{tot}}$  is then governed by a well posed problem [4] composed of a Helmholtz equation equipped with Neumann boundary condition which is of the form

$$\begin{cases} u \in H_{\text{loc}}^1(\Omega), & u_{\text{tot}}(\mathbf{x}) - u_{\text{inc}}(\mathbf{x}) \text{ is outgoing,} \\ \Delta u_{\text{tot}}(\mathbf{x}) + k^2 u_{\text{tot}}(\mathbf{x}) = 0 \text{ in } \Omega, & \frac{\partial u_{\text{tot}}}{\partial n}(\mathbf{x}) = 0 \text{ on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

To compute a numerical approximation with a finite element discretization, it is rather classical to restrict the computational domain to  $\{\mathbf{x} \in \Omega : \|\mathbf{x}\| < R\}$  where  $R$  is chosen large enough so that  $\Omega' \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| < R\}$ . The radiation condition is then taken into account by an artificial boundary condition posed on the exterior boundary  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = R\}$ .

This impedance boundary condition can either be an exact non local Dirichlet to Neumann map, see [3], or an approximate local differential operator which can be derived by a microlocal analysis, see [1,2] for classical papers.

When the rigid body is elongated, this choice of computational domain is not optimal. In this talk, we show how an exact radiation boundary condition can be implemented on an ellipsoidal artificial boundary with semi-minor axis  $b$  and semi-major axis  $a$

$$\Gamma = \left\{ \mathbf{x} \in \Omega : \frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1 \right\}. \quad (2)$$

This work takes its roots in [5].

### REFERENCES

1. B. Engquist and A. Majda. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves // *Math. Comp.* 1977. 31.
2. B. Engquist and A. Majda. Radiation boundary conditions for acoustic and elastic wave calculations // *Comm. pure appl. math.* 1979. V. 32, N 3.
3. J. B. Keller and D. Givoli. Exact non-reflecting boundary conditions // *J. of Comput. Phys.* 1989. 82.
4. C. H. Wilcox. Scattering theory for the d'Alembert equation in exterior domains *lecture notes in mathematics.* 1975. 442.
5. H. Barucq, R. Djellouli, and A.-G. Saint-Guirons. Construction and performance assesment of new local DtN conditions for elongated obstacles // *Appl. Num. Math.* 2009. V. 59, N 7.

## THE METHODS OF RECONSTRUCTION OF THE CHANDLER WOBBLE EXCITATION

Zotov L.V.

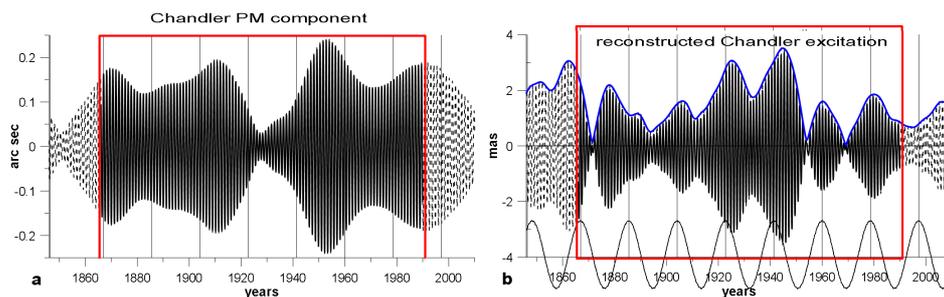
*Sternberg Astronomical Institute of Moscow State University*  
*tempus@sai.msu.ru*

One of the main component of the Earth's pole motion is the Chandler wobble. The amplitude of this resonant motion reaches 0.2 arcsec, Fig. a. The Earth is the viscous-elastic body and Chandler wobble should have been damped with the characteristic time of 50 years, but it does not happen. It is believed, that it is maintained by the hydro-atmospheric excitation.

The Chandler excitation reconstruction from observations is an ill-posed inverse problem. Several methods are proposed for its solving, such as principal components filtering, regularization and corrective smoothing [1]. The latter found to be most useful, it is based on additional filtering of the inverse operator by the Panteleev filter, in purpose to remove annual, low-frequency and other noise components.

In result the 18.6-year amplitude modulation of Chandler excitation, synchronous with the tidal variations caused by the lunar orbital nodes precession cycle was revealed, Fig. 1b, [2]. Study of atmospheric and oceanic angular momentum was also performed.

The work has been supported by the Chinese Academy of Sciences grant for Young International Scientist.



X component of the Chandler wobble (a) and corresponding excitation reconstructed by the corrective smoothing (b). 18.6-year harmonic along the abscissa.

### REFERENCES

1. *L. Zotov, V.L. Panteleev*. Filtering and inverse problems solving, Computational Methods for Applied Inverse Problems Ed. Y. F. Wang, A. G. Yagola, C. C. Yang, De Gruyter. Higher Education Press. 2012.
2. *L. Zotov, C. Bizourad*, On modulations of the Chandler wobble excitation // J. Geodynamics. 2012. DOI: 10.1016/j.jog.2012.03.010

**ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА-ЛЯВА  
И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ НАГРУЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ**

Аблабеков Б.С.

*Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова  
ablabekov\_63@mail.ru*

Рассматриваются следующие обратные задачи.

Задача 1. Найти пару функций  $\{u(x,t), f(t)\}$  из условий

$$\frac{\partial^2}{\partial^2}[u_{xx} - u] + u_{xx} = f(t)h(x,t) + g(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$u(x_0,t) = \mu_3(t), \quad 0 \leq x_0 \leq l, \quad 0 \leq t \leq l.$$

Задача 2. Найти функцию  $u(x,t)$  из условий

$$\frac{\partial^2}{\partial^2}[u_{xx} - u] + u_{xx} = (u_{tt} + u)_{xx}(x_0,t)h_1(x,t) + g(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Задача 3. Найти пару функций  $\{u(x,t), f(t)\}$  из условий

$$\frac{\partial^2}{\partial^2}[u_{xx} - u] + u_{xx} = f(t)h(x,t) + g(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\int_0^l u(x,t) \varpi(x,t) dx = \mu_3(t), \quad 0 \leq t \leq l.$$

Для рассмотренных обратных задач методом операторных уравнений

Вольтерра доказываются соответствующие теоремы существования и единственности решения.

## ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ АКУСТИКИ И ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

Алексеев Г.В.

*Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток  
alekseev@iam.dvo.ru*

В данном докладе рассматриваются два класса обратных задач, возникающих в акустике и электромагнетизме. Первый класс задач связан с задачами создания нерассеивающих оболочек, т. е. пространственных структур, которые делают любой расположенный внутри указанной структуры объект свободным от акустического рассеяния. Ряд классов такого типа оболочек, имеющих форму сферического слоя, для модели анизотропной акустики, описаны в [1, 2]. В настоящей работе возможность существования нерассеивающих конструкций исследуется в рамках теории обратных задач. В соответствии с этим подходом задача построения нерассеивающей конструкции формулируется как обратная задача нахождения неизвестных коэффициентов обобщенного уравнения Гельмгольца, отвечающего рассматриваемой модели анизотропной акустики, по дополнительной информации о рассеянном искомой оболочкой поле. Для исследования указанной коэффициентной обратной задачи применяется подход, основанный на ее сведении к соответствующей задаче управления. Он заключается во введении функционала качества, адекватно отвечающего рассматриваемой обратной задаче, и сведении исходной обратной задачи к задаче минимизации указанного функционала качества. Последнее позволяет применять для ее решения хорошо развитые методы условной оптимизации.

Еще один класс задач связан с уравнениями Максвелла, рассматриваемыми при смешанных граничных условиях для электрического поля. Граница области, где рассматриваются уравнения Максвелла, предполагается состоящей из двух частей. На одной части границы задается тангенциальная компонента электрического поля, на другой ее части задается импедансное граничное условие. Обратная задача заключается в нахождении импеданса и других функций, входящих в импедансное граничное условие, по дополнительной информации о решении (электрическом поле) в некоторой части области. С помощью оптимизационного метода обратная задача сводится к задаче минимизации определенного функционала качества. Роль управлений играют неизвестные функции, входящие в импедансное граничное условие. Доказывается разрешимость как исходной краевой задачи, так и экстремальных задач для уравнений Максвелла, исследуются вопросы единственности и устойчивости решений.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cummer S.A., Popa B.I., Schurig D. et al.* Scattering theory derivation of a 3D acoustic cloaking shell. // *Phys. Rev. Letters.* 2008. V. 100. 024301.
2. *Алексеев Г.В., Романов В.Г.* Об одном классе нерассеивающих акустических оболочек для модели анизотропной акустики // *Сиб. журн. индустр. матем.* 2011. Т. 14, № 2. С. 15–20.

**НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ И ПРИЛОЖЕНИЙ  
ОБРАТНЫХ И НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ**

Аниконов Ю.Е.

*Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск  
anikon@math.nsc.ru*

В докладе предполагается привести способы и результаты исследований последних лет по обратным и некорректным задачам. К ним относятся аналитические представления решений и коэффициентов эволюционных уравнений и их использование в теории и приложениях обратных задач, некорректные обратные задачи с переменным параметром и другие.

**О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО  
ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ  
СМЕШАННОГО ТИПА**

Антипин В.И.

*Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск  
antvasiv@mail.ru*

Работа посвящена исследованию краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений вида

$$Mu \equiv B(t)u_t - L(t)u = f, \quad t \in (0, T), \quad T \leq \infty, \quad (1)$$

где  $B(t), L(t)$  ( $t \in (0, T)$ ) – линейные операторы, определенные в данном гильбертовом пространстве  $E$ . Предполагаем, что оператор  $B$  обратим, в частности, он может иметь ненулевое ядро. Определим пространства  $F_0, G_0$ , как пополнение  $D(|B(0)|^{1/2})$  и  $D(|B(T)|^{1/2})$  по нормам  $\|u\|_0 = \||B(0)|^{1/2}u\|$  и  $\|u\|_T = \||B(T)|^{1/2}u\|$  соответственно. Пусть также  $F_0^\pm = \{u \in F_0 : E^\pm(0)u = u\}$ ,  $G_0^\pm = \{u \in G_0 : E^\pm(T)u = u\}$ , где  $E^\pm(0), E^\pm(T)$  – спектральные проекторы операторов  $B(0)$  и  $B(T)$ , соответствующие положительной и отрицательной частям спектра [1,2].

Уравнение (1) дополним краевыми условиями

$$E^+(0)u(0) = u_0^+, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0 \quad (T = \infty).$$

$$E^+(0)u(0) = h_{11}E^-(0)u(0) + h_{12}E^+(T)u(T) + u_0^+,$$

$$E^-(T)u(T) = h_{21}E^-(0)u(0) + h_{22}E^+(T)u(T) + u_T^- \quad (T < \infty),$$

где операторы  $h_{ij}$  обладают свойствами:  $h_{11} \in L(F_0^-, F_0^+)$ ,  $h_{12} \in L(G_0^+, F_0^+)$ ,  $h_{21} \in L(F_0^-, G_0^-)$ ,  $h_{22} \in L(G_0^+, G_0^-)$ .

В работе сформулированы и доказаны теоремы существования и единственности поставленных краевых задач для уравнения (1).

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. по мероприятию 1.3.1 и гранта Министерства образования и науки РФ №02. 740.11.0609.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пятков С.Г. Некоторые свойства собственных функций линейных пучков // Сибир. мат. журнал. 1989. Т.30, № 4. С. 111-124.
2. Пятков С.Г. Свойства собственных функций одной спектральной задачи и некоторые их приложения // Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики. Новосибирск. 1986. С. 65-84.

## О СВОЙСТВАХ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА КОШИ С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ЯДРОМ

Арбузов Э.В.

*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск*  
*arbuzov@math.nsc.ru*

Для ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{C}$ ,  $\tau > 0$ , функций  $a(x)$  и  $\varphi(x)$  (вещественнозначной) определим интегральный оператор Коши вида

$$P_{\tau,a}u(x) = \int_{\Omega} e^{-i\tau\varphi(y)} \frac{a(y)u(y)}{x-y} dy, \quad (1)$$

и оператор

$$Su(x) = P_{\tau,a} \overline{P_{-\tau,b}u}(x), \quad x \in \Omega.$$

На основании оценок для оператора  $S$  в пространствах Гельдера и Лебега в работе [1] была доказана формула типа Карлемана для решения задачи Коши для эллиптических уравнений второго порядка на плоскости, а в работе [2] решена обратная задача восстановления потенциала по данным Коши для уравнения  $\Delta u + au = 0$ .

В данной работе, с помощью операторов дробного интегро-дифференцирования по Риссу ([3]), были получены оценки оператора  $S$  в пространствах риссовых потенциалов, а также получены новые оценки в пространствах Гельдера.

Работа проводилась при частичной поддержке РФФИ (грант 11-01-00147).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арбузов Э. В., Бухгейм А. Л. Формула Карлемана для уравнения Гельмгольца на плоскости. // Сиб. матем. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 518–526.
2. Bukhgeim A. L. Recovering a potential from Cauchy data in the two-dimensional case // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2008. V. 16, № 1. P. 19–33.
3. Самко С. Г. О пространствах риссовых потенциалов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40, № 5. С. 1143–1172.

**О РЕШЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ТРЕТЬЕГО РОДА**

Асанов Р.А.

*Кыргызский Государственный Технический Университет, Бишкек  
ruhidin\_asanov@yahoo.com*

В данной работе рассмотрены линейные интегральные уравнения третьего рода. На основе нового подхода, описанного в [1], доказаны теоремы существования и единственности решения линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иманалиев М.И., Асанов А., Асанов Р.А.* Об одном классе систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода. // ДАН. 2011. Т. 437, №. 5. С. 592–596.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ СВОЙСТВ ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОЙ  
СРЕДЫ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ  
ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ**

Астракова А.С.

*Институт Вычислительных Технологий, Новосибирск  
anna.astrakova@gmail.com*

В настоящее время при бурении скважины в породе существует проблема утекания бурового раствора в породу. Для борьбы с этим явлением, необходимо знать свойства породы. Поскольку имеется взаимосвязь между свойствами породы и реологией жидкости, с одной стороны, и величиной потерь раствора, с другой [1], то эти свойства могут быть определены на основе анализа потерь.

В работе интересующие свойства породы отыскиваются путем решения обратной задачи, сформулированной в виде оптимизационной:

$$\min_{\mathbf{x} \in X} F(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x} \in X} \left( \sum_{i=1}^N ((Q_{well}^{exp}(t_i) - Q_{well}(t_i, \mathbf{x})) \cdot \Delta t_i)^2 \right)^{1/2}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{x}$  – набор параметров, характеризующий свойства породы и реологию жидкости;  $Q_{well}^{exp}(t)$  – потери, полученные в результате замеров в процессе бурения;  $Q_{well}(t, \mathbf{x})$  – потери, определенные для набора параметров  $\mathbf{x}$  из решения прямой задачи фильтрации вязкопластической жидкости [2] с использованием данных измерений давления в скважине  $p_{well}^{exp} = p_{well}^{exp}(t)$ .

Решение сформулированной обратной задачи осуществляется методом золотого сечения и с помощью генетического алгоритма. В результате построен метод определения параметров трещиновато-пористой среды по данным измерений потерь бурового раствора в скважине.

Работа проводилась при поддержке Новосибирского технологического центра компании Schlumberger. Автор выражает свою благодарность сотрудникам ИВТ СО РАН С. Г. Черному, В. Н. Лапину, а также работникам компании Schlumberger О. П. Алексеенко, Д. В. Бадажкову, П. А. Няга за выбор направления исследований и помощь в их проведении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Van der Zwaag C.H., Omland T. H., Vandbakk T.* Dynamic Filtration: Seepage Losses on Tyrihans // SPE Intern. Symp. and Exhib. on Formation Damage Control, 15-17 February 2012, Lafayette (USA). Society of Petroleum Engineers: Drilling and Completions, 2012.
2. *Басниев К.С., Кочина И.Н.* Подземная гидродинамика. М.: Недра, 1983. 415 с.

**О СОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ  
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ  
В ОБЛАСТИ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ**

Ахманова Д.М., Космакова М.Т., Петерс С.Н.  
*Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова,  
 Караганда, Казахстан  
 dannab7@mail.ru*

При изучении температурного поля контактной системы и динамики его изменения его во времени возникает необходимость исследования краевой задачи следующего вида: [1] - [3]

$$-\nu_1 = \nu_{xx}; \quad t > 0, \quad 0 < x < t;$$

$$\nu(x, t)|_{x=0} = \nu^*(t), \quad \nu(x, t)|_{x=1} = \omega^*(t), \quad \nu(x, t)|_{t=\infty} = 0. \quad (1)$$

Задача (1) сводится к сингулярному интегральному уравнению вида:

$$\begin{aligned} \psi(t) - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_t^\infty \left( \frac{\tau + t}{(\tau - t)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{(\tau + t)^2}{4a^2(\tau - t)} \right] + \frac{1}{\sqrt{\tau - t}} \exp \left[ -\frac{\tau - t}{4a^2} \right] \right) \psi(\tau) d\tau = \\ = g(t), \quad (t > 0). \quad (2) \end{aligned}$$

В работе показано, что соответствующее однородное уравнение (2), а вместе с ним и соответствующая однородная краевая задача (1) имеет ненулевое решение. Очевидно, что уравнение (2) равносильно уравнению:

$$\begin{aligned} \psi(t) - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_t^\infty \left[ \left( \frac{2\tau}{(\tau - t)^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{\tau - t}} \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot \exp \left[ -\frac{\tau \cdot t}{a^2(\tau - t)} \right] + \frac{1}{\sqrt{\tau - t}} \exp \left[ -\frac{\tau - t}{4a^2} \right] \right] \psi(\tau) d\tau = g(t). \quad (3) \end{aligned}$$

Для решения однородного уравнения (2) достаточно найти решение “упрощенного” уравнения:

$$\begin{aligned} \psi(t) - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau - t}} \left[ 1 - \exp \left[ -\frac{\tau \cdot t}{a^2(\tau - t)} \right] \right] + \\ + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \frac{2\tau}{(\tau - t)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{\tau \cdot t}{a^2(\tau - t)} \right] \psi(\tau) d\tau = 0. \quad (4) \end{aligned}$$

Применив обратное преобразование Лапласа и возвращаясь к старым переменным, получим, что решение однородного уравнения (4) имеет вид:

$$\psi_{odn}(t) = -\frac{1}{t^{3/2}} \left( a^2 \frac{\partial}{\partial \nu} \widehat{\theta}_0 \left( \frac{\nu}{2}; \frac{a^2}{t} \right) \right)_{\nu=0},$$

где  $\widehat{\theta}_0(\nu, t)$  – модифицированная тета-функция.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Харин С.Н. Тепловые процессы в электрических контактах и связанных сингулярных интегральных уравнений. Дис. ... канд. физ.-мат. наук, ИММ акад. Наук КазССР, 1970. С. 13.
2. Ахманова Д.М., Космакова М.Т., Рамазанов М.И. Решение одного сингулярного интегрального уравнения Вольтерра второго рода // Вестн. КарГУ. 2012. N 2(66). С.27-32.
3. Ахманова Д.М., Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Об особом интегральном уравнении Вольтерра второго рода со спектральным параметром // Сиб. матем. журн. 2011. Т. 52. № 1. С. 3-14.

## ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА РАСЧЕТА ВЛИЯНИЯ РЕЛЬЕФА НА ОЦЕНКУ ТЕПЛОвого ПОТОКА ЗЕМЛИ

Аюнов Д.Е., Скуридина В.В.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск  
einfff@gmail.com, skyriding@gmail.com*

Геотемпературное поле вблизи земной поверхности нарушается рядом факторов, среди которых в горных районах и в водоемах с неровным дном основное значение имеют нерегулярности рельефа и изменения температуры земной поверхности. Для учета влияния рельефа на геотермический градиент (тепловой поток) рассчитываются так называемые топографические поправки. Топографическая поправка находится в результате численного решения уравнения Лапласа с переменными коэффициентами и смешанными граничными условиями.

Известно несколько методик расчета топопоправок к измеренному геотермическому градиенту [1]: метод Джеффриса – Булларда, наклонного уступа, конечных разностей, конечных элементов и т. д. В наших исследованиях мы использовали метод Монте – Карло, основу которого составляет многократное повторение случайных блужданий из рассматриваемой точки модели [3].

Нами был программно реализован параллельный алгоритм блуждания по сферам для исполнения на графических процессорах с использованием технологии CUDA. Для обеспечения хорошей точности расчетов требуется строить большое количество траекторий, каждая из которых вычисляется независимо. Поскольку длины траекторий могут существенно различаться, было принято решение одновременно выполнять отрезки блужданий длиной  $M$  для всех траекторий. После этого центральный процессор производит сортировку траекторий на завершенные и активные. Оставшиеся активные траектории переупорядочиваются и опять запускаются на графической карте и т. д.

Число используемых потоков совпадает с количеством оставшихся траекторий, которое убывает по экспоненте. В этой связи длина отрезка блужданий также уменьшалась после каждой сортировки. В результате удалось добиться существенного ускорения вычислений по сравнению с последовательной программой (зависит от числа траекторий): для  $10^5$  траекторий время подсчетов уменьшилось в 7 раз, для  $10^6$  – в 20 раз, для  $10^7$  – в 25 раз.

Авторы выражают благодарность Дучкову А.Д., Дучкову А.А. и Романенко А.А. за постановку задачи и помощь. Работа проводилась при частичной поддержке Проекта Президиума РАН № 4.1 и Проекта ОНЗ РАН № 7.1.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Powell W.G., Chapman D.S., Balling N., Beck A.E.* Continental heat flow density / In: Handbook of terrestrial heat flow Commission / Ed. by R. Haenel, L. Rybach, L. Stegena. Kluwer Acad. Publ. 1988. P. 167-222.
2. *Соболь И.Н.* Численные методы Монте – Карло. М.: Физматлит, 1973. 312 с.

## МЕТОД СОВМЕСТНОГО ОБРАЩЕНИЯ 3D СКАЛЯРНОГО И ВЕКТОРНОГО ЛУЧЕВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Баладин А.Л.

*Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск*  
*balandin@icc.ru*

В большинстве физических приложений векторное лучевое преобразование по-  
является в виде

$$\mathcal{V}_I \mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\mathbf{x} + t\boldsymbol{\xi}) \mathbf{g}(\mathbf{x} + t\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\xi} dt, \quad \mathcal{I}\varepsilon(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\mathbf{x} + t\boldsymbol{\xi}) dt, \quad (1)$$

$\mathbf{x} \in \boldsymbol{\xi}^\perp, \boldsymbol{\xi} \in \Omega \subset \mathbb{S}^2.$

Например, в случае поляризованных измерений функции  $\varepsilon(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  имеют  
смысл электронной плотности и магнитного поля. При доплеровских измерениях  
эти функции имеют, соответственно, смысл функции распределения коэффициен-  
ентов эмиссии и поля скоростей. В работе предложен метод совместного решения  
уравнений (1), (совместное обращение скалярного и векторного лучевых преоб-  
разований). Первое из уравнений (1) в пространстве Фурье имеет вид

$$\tilde{\mathcal{V}}_I \mathbf{g}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^3 \xi_j \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varepsilon}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \tilde{\mathbf{g}}_j(\mathbf{k}') d\mathbf{k}', \quad \mathbf{k}, \mathbf{k}' \in \mathbb{R}^3. \quad (2)$$

Функцию  $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{k})$  представляем в виде

$$\tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} j_l(k\lambda) Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}), \quad k = |\mathbf{k}|, \quad \hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, \quad (3)$$

коэффициенты  $a_{lm}$  определяются из второго уравнения (1) в соответствии с тео-  
ремой о центральном сечении,  $j_l(k\lambda)$  – сферические функции Бесселя,  $\lambda$  – кон-  
станта,  $Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}})$  – сферические гармоники. Трёхмерная свёртка (2), вычисляется  
с использованием следующей теоремы сложения [1]

$$j_{l_1}(\lambda r_2) Y_{l_1 m_1}(\hat{\mathbf{r}}_2) = \sum_{l_2=0}^{\infty} \sum_{m_2=-l_2}^{l_2} S_{l_1 l_2}^{m_1 m_2}(\mathbf{b}) j_{l_2}(\lambda r_1) Y_{l_2 m_2}(\hat{\mathbf{r}}_1), \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{b} \quad (4)$$

$$S_{l_1 l_2}^{m_1 m_2}(\mathbf{b}) = 4\pi i^{l_2 - l_1} \sum_{l_4=0}^{\infty} i^{l_4} (-1)^{m_1} j_{l_4}(\lambda b) Y_{l_4, (m_2 - m_1)}^*(\hat{\mathbf{b}}) \mathcal{G}(l_1 m_1; l_2 m_2; l_3), \quad (5)$$

$$\mathcal{G}(l_1 m_1; l_2 m_2; l_3) = \sqrt{\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)}{4\pi(2l_3 + 1)}} C_{l_1 0 l_2 0}^{l_3 0} C_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{l_3 (m_1 + m_2)} \quad (6)$$

Гаунт (Gaunt) коэффициенты,  $\mathcal{G}(l_1 m_1; l_2 m_2; l_3)$ , выражаются через коэффициен-  
ты Клебша – Гордана. В докладе представлены результаты численного модели-  
рования.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sack R.A.* Three-dimensional addition theorem for arbitrary functions involving  
expansions in spherical harmonics // *J. of Math. Phys.* 1964. V. 5, N 2. P. 252-  
259.

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ  
ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ  
СОЛЕ- ВЛАГО ПЕРЕНОСА В СИСТЕМЕ МАТЛАВ**

Балтабаева Р. Б.

*Каракалпакский государственный университет, г. Нукус*

Рассмотрена задача

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_1^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( u_{3-i}^{\sigma_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \pm q(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} u_i \right] \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

$$u_i|_{t=0} = u_{i0}(x) \geq 0$$

(где  $\sigma_i$  – заданные числовые параметры) в области  $Q = \{(t, x) : t > 0, x \in R^N\}$ .

Система (1) описывает процессы теплопроводности фильтрации в жидкости и газе, взаимной диффузии, соле- влагопереноса и др. в двухкомпонентных нелинейных средах. Коэффициент  $q(x, t)$  означает скорость конвективного переноса.

Задача Коши для системы (1) была предметом изучения многих авторов [1], исследовавших различные свойства решений.

В работе [4] рассмотрен случай, когда скорость конвективного переноса зависит от времени, т. е.  $q(x, t) = q(t)$ , получено условие на  $q(t)$ , при котором имеет место явление пространственной локализации решений, приведены численные результаты. В работе [3] рассмотрен одномерный случай, численные результаты получены с помощью программного средства Delphi.

В настоящей работе рассмотрен двумерный случай системы (1), когда  $q_i(x, t) = q_i(x)$ , изучена асимптотика решений в зависимости от дифференциальных свойств  $q_i(x)$  и свойство обобщенного решения из класса  $0 \leq u_i(x)$ , где  $u_{3-i}^{\sigma_i}(x) \frac{du}{dx} \in C(0, \infty)$  удовлетворяют систему (1) в смысле распределения.

Созданная программа в системе Matlab может использоваться для решения одно- и двухфазной фильтраций, солепереноса в нефтяной отрасли. Для решения данной задачи была использована продольно-поперечная схема. Численно установлено наличие эффектов конечной скорости распространения концентрации соли-пыли, влаги. В среднем количество итераций для каждого временного слоя не превышает 3 при допустимой погрешности  $10^{-5}$ . Численные расчеты проводятся на основе результатов исследований качественных свойств решений. В программу включены методы М.М.Арипова, Пикара и Ньютона

Программа состоит из модулей и даёт возможность численно решать систему при различных параметрах. Также программа визуализирует в двумерной области и анимирует.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Арипов М., Садуллаева Ш.А. К поведению свободной границы для уравнения нелинейной фильтрации // Ташкент. Вестн. вузов. Сер. Матем. 2004. № 1.

2. Самарский А. А. Теория разностных схем: Учеб. пособ. М.: Наука, 1977.
3. Арипов М.М., Балтабаева Р.Б. К свойству одной математической модели соле-пыле переноса в двухкомпонентной нелинейной среде с учетом конвективности // Материалы респ. конф., 2012, Нукус. С. 32-34.
4. Балтабаева Р.Б. К численному моделированию процесса соле-пылепереноса в нелинейной двухкомпонентной среде // Вестн. Кыргызского нац. ун-та. 2011. № 24. С. 93-96.

**О НЕСТАНДАРТНОМ ПОВЕДЕНИИ  
МИНИМАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ БИОСФЕРЫ**

Барцев С.И., чл.-кор. РАН Дегерменджи А.Г., чл.-кор. РАН Федотов А.М.,  
Медведев С.Б., Пестунов А.И., Пестунов И.А.  
*Институт биофизики СО РАН, Красноярск*  
*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск*  
*fedotov@sbras.ru*

Наблюдаемые в последние десятилетия изменения в биосфере вызывают обеспокоенное беспокойство мирового сообщества. Одним из ключевых параметров состояния биосферы является содержание углекислого газа в атмосфере, непрерывный рост концентрации которого фиксируется с 1958 г. Большинство исследователей считают причиной этого явления возрастающие темпы сжигания ископаемых топлив. Как следствие, широкое распространение получила гипотеза о существовании “парникового эффекта”, который объясняется наличием связи между температурой атмосферы и содержанием в ней “парниковых” газов (диоксид углерода, метан, пары воды, окислы азота, фреоны и др.) из-за различия в проводимости этими газами коротковолнового и длинноволнового излучения. При этом считается, что среди парниковых газов диоксид углерода оказывает наиболее существенное влияние на климат.

Вместе с тем, анализ литературы показывает, что среди ученых нет единого мнения относительно наличия парникового эффекта. Однако если предположить, что эта гипотеза верна, то наблюдаемое с 1958 года возрастание концентрации  $\text{CO}_2$  в атмосфере способствует возникновению риска увеличения глобальной температуры и связанных с этим катастрофических явлений планетарного масштаба. Являются ли уровни  $\text{CO}_2$  беспрецедентно высокими – предмет дискуссии [4-6], да и сам рост температуры последние полвека может быть вызван иными закономерностями. Кроме того, рост концентрации  $\text{CO}_2$  может быть следствием изменения температуры, например, океан – резервуар газа, выделяет его при нагревании.

В такой ситуации важной проблемой является определение условий устойчивости состояния биосферы, которая может зависеть не только от массы сжигаемых топлив, но и ряда других факторов, приводящих к резким изменениям параметров биосферы. Фактором повышения  $\text{CO}_2$  может быть и естественная ситуация превалирования дыхания над фотосинтезом.

Очевидно, что целенаправленные эксперименты с биосферой невозможны. Наиболее удобным и не требующим дорогостоящих экспериментов способом исследования биосферных процессов является математическое моделирование, позволяющее рассматривать вероятные сценарии развития изучаемого процесса в условиях различных гипотез о причинно-следственных связях параметров модели. Крайняя важность и дискуссионность вопроса о причинах глобальных биосферных изменений, а также принцип предосторожности дают основание включать в математические модели предположение о глобальном потеплении.

Целью данной работы является выявление границ устойчивости модели “земной биосферы”, возможных “точек переключения”, в которых катастрофическим образом может измениться режим существующих земных биогеоценозов.

В настоящее время разработка математических моделей глобальной динамики углерода происходит в двух основных направлениях: 1) усложнение моделей за счёт ввода дополнительных параметров (это повышает адекватность, но усложняет контроль); 2) упрощение моделей, т. е. построение так называемых минимальных моделей, основанных на использовании небольшого числа хорошо определяемых и контролируемых интегральных характеристик.

С помощью минимальных моделей нельзя, конечно, описать количественную динамику развития биосферы, соответствующую совокупному действию множества известных климатических и биосферных процессов. Однако исследование таких моделей позволяет понять качественные механизмы основных процессов, происходящих в биосфере. Как отмечал А.А. Ляпунов, первоочередная цель работы, связанной с применением методов математического моделирования является понимание того или иного явления, а не получение каких-либо чисел или картинок.

Нами показана возможность реализации в биосфере триггерного режима, способного привести к резкому изменению состояния биосферы даже без сжигания ископаемых топлив. Реализация триггерного режима возможна при значениях параметров биосферы, входящих в интервал существующих оценок. Отсюда следует опасность любого резкого изменения состояний биосферы, например, интенсивных вырубок леса и интенсивных, массовых лесопосадок. Выявление характерных признаков триггерного режима и оценка дозы воздействия, способная привести к быстрой смене режима требуют дальнейшего исследования.

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ПО СФЕРИЧЕСКИМ СРЕДНИМ  
НА ПЛОСКОСТИ И В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

Бегматов А.Х., Джайков Г.М

*Новосибирский государственный технический университет**akbar\_begmatov@mail.ru*

В докладе рассматриваются задачи восстановления функции, если известны интегралы от этой функции по всевозможным окружностям в полосе (сферам в трехмерном слое) с заданной весовой функцией. Окружности (сферы), по которым ведется интегрирование, опираются на ось  $x_2 = 0$  ( $x_3 = 0$ ).

Доказана теорема единственности решения задачи для двух весовых функций специального вида. Исследуются вопросы единственности и устойчивости решения интегральных уравнений Вольтерра первого рода, связанных с изучаемой задачей интегральной геометрии.

Представлены оценки устойчивости решения исходной задачи в пространствах соболевского типа, что показывает ее слабую неустойчивость. Выведена явная формула для искомой функции через интегро-дифференциальный оператор от данных задачи, то есть правой части. Получены условия существования решения задачи. На основе формулы обращения разработан устойчивый алгоритм решения задачи.

**ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ  
НА КОНИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ  
СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ ВЕСОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ**

Бегматов А.Х., Илюхина А.В.

*Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск*

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск*

*akbar\_begmatov@mail.ru*

Пусть  $x \in R^n, \xi \in R^n$  ( $n = 1, 2$ ),  $L = \{(x, y) : 0 \leq y \leq H, 0 < H < \infty\}$ ,  $\Gamma(x, y) = \{(\xi, \eta) : y - \eta = |x - \xi|, 0 \leq \eta \leq y\}$ ,  $G(x, y)$  ограничено линиями  $\Gamma(x, y)$  и осью  $Ox$  (поверхностью  $\Gamma(x, y)$  и плоскостью  $Ox_1x_2$ ).

**Постановка:** В слое  $L$  рассмотрим операторное уравнение относительно функции  $u(x, y)$ :

$$\int_{\Gamma(x,y)} g(x, y, \xi, \eta)u(\xi, \eta)dl + \iint_{G(x,y)} K(x, y, \xi, \eta)u(\xi, \eta)dS = f(x, y). \quad (1)$$

Задача решения уравнения (1) является задачей интегральной геометрии с возмущением. При  $K = 0$  получены формулы обращения для соответствующей задачи интегральной геометрии и доказаны теоремы единственности для различных весовых функций. Также для различных весовых функций показаны разные характеры устойчивости. Для слабо неустойчивых задач получены оценки устойчивости в пространствах соболевского типа.

Для задачи с возмущением ( $K \neq 0$ ) в случаях, когда задача является слабо некорректной, при достаточно общих предположениях о весовой функции доказана теорема единственности и получены оценки устойчивости решения в пространствах соболевского типа.

**ДВЕ СЛАБО НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ  
ГЕОМЕТРИИ В ПОЛОСЕ**

Бегматов А.Х., Пиримбетов А.О., Сейдуллаев А.К.  
*Новосибирский государственный технический университет*  
akbar\_begmatov@mail.ru, abat\_1984@inbox.ru

В работе рассматривается задача восстановления функции  $u(x)$  в полосе  $R^2$ , если известны интегралы от этой функции по кривым из заданного семейства. Обозначим  $(x, y) \in R^2$ ,  $(\xi, \eta) \in R^2$ .

**Постановка задачи.** Восстановить функцию двух переменных  $u(x, y)$ , если известны интегралы от нее с заданной весовой функцией  $g(x, \xi)$  на семействе кривых  $\{P(x, y)\}$ :

$$\int_{P(x,y)} g(x, y; \xi, \eta) u(x, y) = f(x, y) \quad (1)$$

В докладе рассматриваются два различных семейства кривых  $\{P(x, y)\}$ . В первом случае кривая семейства определяется соотношением  $P_1(x, y) = \{(\xi, \eta) : |y - \eta| = (x - \xi)^2\}$ , во втором -  $P_2(x, y) = \{(\xi, \eta) : |y - \eta| = |x - \xi|^{\frac{1}{2}}\}$ .

Задача решения уравнения (1) представляет собой задачу интегральной геометрии. Получены формулы обращения и теоремы единственности решения для различных весовых функций. Также для различных весовых функций выявлен разный характер устойчивости решения задачи (1). На основе этого разработан алгоритм устойчивого решения задачи (1).

## МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД КРЫЛОВА — БОГОЛЮБОВА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Белоносов В.С.

*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск*  
*bvs@math.nsc.ru*

Рассматривается вопрос о применении асимптотического метода Крылова — Боголюбова [1] к изучению уравнения  $u_t = \varepsilon f(t, u)$ , где  $u(t)$  — функция со значениями в банаховом пространстве,  $f$  — непрерывный по  $(t, u)$  нелинейный оператор,  $\varepsilon$  — малый параметр. Напомним, что в основе метода лежит идея о разложении решений на плавный медленный дрейф и малые быстрые осцилляции: ищется такая замена переменных  $u = \Phi(t, v; \varepsilon) \equiv v + \sum_{k=1}^n \varepsilon^k \varphi_k(t, v)$ , чтобы  $\varphi_k(t, v)$  были ограничены при  $t \rightarrow \infty$ , а исходное уравнение с точностью до слагаемых порядка  $\varepsilon^n$  приобрело вид  $v_t = \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k f_k(v)$ . Функция  $v$  приближенно описывает медленный дрейф, на который «накладываются» быстрые осцилляции, задаваемые отображением  $\Phi$ .

Существующие обоснования этого метода обусловлены жесткими ограничениями [2]. Оператор  $f$  обычно считается периодическим или почти периодическим по  $t$ , а ряд дополнительных требований связан с преодолением известной проблемы «малых знаменателей» [3]. Мы предлагаем другую интерпретацию: в уравнении для  $v$  допускаются не только автономные, но также медленно осциллирующие функции  $f_k(t, v)$  (степень осцилляций всякой функции  $g(t)$  характеризуется ее спектром  $\sigma(g)$ , то есть носителем преобразования Фурье  $F[g]$ , понимаемого в смысле теории распределений). Кроме того, в формуле для  $\Phi$  вместо  $\varepsilon$  выбирается другой произвольный малый параметр  $\delta$ , характеризующий масштаб пространственных искажений при замене переменных. Такой подход позволяет вообще освободиться от каких-либо ограничений, за исключением требований к гладкости функции  $f$ .

Установлено [4], что если  $f(t, u)$  имеет непрерывные и ограниченные производные  $D_u^m f$  порядков  $m \leq n + 1$ , то для любого  $\alpha > 0$  найдется замена переменных  $u = v + \sum_{k=1}^n \delta^k \varphi_k(t, v; \varepsilon, \delta)$ , приводящая исходное уравнение к виду  $v_t = \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \delta^k f_k(t, v; \varepsilon, \delta)$  с точностью до слагаемых порядка  $\delta^n$ . Все функции  $f_k$  и  $\varphi_k$ , а также их производные  $D_v f_k$  и  $D_v \varphi_k$  непрерывны и ограничены, причем  $\sigma(f_k) \subset \{\lambda : |\lambda| < 2\alpha\varepsilon/\delta\}$ ,  $\sigma(\varphi_k) \subset \{\lambda : |\lambda| > \alpha\varepsilon/\delta\}$ . На любом промежутке  $0 \leq t \leq T/\varepsilon$  норма разности между точным и приближенным решениями оценивается сверху величиной  $C(T)\delta^n$ .

Предложенная модификация использована при построении теории нелинейного резонанса для абстрактных гиперболических уравнений  $\ddot{u} = -A^2 u + \varepsilon[B(\omega t)u + Q(u, u)]$  в гильбертовом пространстве. Здесь  $A$  — неограниченный линейный самосопряженный оператор,  $B(\tau)$  —  $2\pi$ -периодический по  $\tau$  линейный ограниченный оператор, а  $Q(u, v)$  — билинейная эрмитова форма. Показано, что амплитуда колебаний решения  $u(t)$  на интервалах времени порядка  $1/\varepsilon$  в любом фиксированном шаре  $\|u\| \leq r$  приближенно описывается конечномерной динамической

системой, зависящей от начальных значений  $u(0)$  и  $\dot{u}(0)$ . Эту систему можно найти модифицированным методом Крылова — Боголюбова. В итоге удастся объяснить качественную картину пульсации амплитуд при нелинейном резонансе, а также предложить алгоритм приближенного вычисления решений исходного уравнения.

Работа поддержана СО РАН (интеграционный проект № 30)

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. Киев: Изд-во АН УССР, 1937.

2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 2-е. М.: Наука, 1974.

3. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.

4. Белоносов В. С. Спектральные свойства обобщенных функций и асимптотические методы теории возмущений // Матем. сб. 2012. **203**, № 3. С. 3–22.

**ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ  
ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ГРАНУЛИРОВАННОЙ СРЕДЫ  
В ВИБРИРУЮЩИХ СОСУДАХ**

Богульский И.О., Богульская Н.А.<sup>1</sup>, Волчков Ю.М.<sup>2</sup>

*Красноярский государственный аграрный университет, г. Красноярск*

<sup>1</sup>*Сибирский федеральный университет, г. Красноярск*

<sup>2</sup>*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск*  
*volk@hydro.nsc.ru*

Предлагается математическая модель движения гранулированной среды. Каждая частица среды моделируется абсолютно твердым телом (кругом в плоском случае, шаром в трехмерном пространстве), окруженным достаточно тонкой упругой оболочкой. Эта модель позволяет описать взаимодействие и движение частиц на достаточно большом временном промежутке. Посредством решения прямых задач удается определить оптимальные (с точки зрения равномерности вытекания гранул через отверстия) геометрические и технологические параметры работы сосуда (частоту, амплитуду, высоту слоя частиц и т.д.)

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Богульская Н.А., Богульский И.О., Вишняков А.А.* Оптимизация конструктивных параметров высевающего аппарата вибрационного типа. // Вестник КрасГАУ. 2009. №1 (28). С. 110-112.

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ  
ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ РАССЕЙВАЮЩИХ  
ЦЕНТРОВ ПО НАБОРУ ПРОЕКЦИЙ**

Бондаренко А.Н., Дедок В.А., Козинкин Л.А., Токарев М.П.  
*Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН, Институт  
теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирский  
государственный университет, Новосибирск  
bondarenkoan1953@mail.ru, dedok@math.nsc.ru, mtokarev@itp.nsc.ru*

В настоящее время томографические методы широко применяются для исследования внутренней структуры объектов. Математический аппарат вычислительной томографии изложен в монографиях [1, 2]. В последнее время все чаще стали появляться примеры использования томографии и в других областях науки и техники. Например, оптическая томография рассеивающих сред сравнительно недавно стала применяться в методе цифровой трассерной визуализации – particle image velocimetry (PIV) [3].

С математической точки зрения задача, поставленная в [5], сводится к восстановлению положений дискретных рассеивающих центров в  $\mathbb{R}^3$  по набору двумерных проекций.

В данной работе предложен и математически обоснован алгоритм получения максимального множества точек, проекции которого в плоскости заданные светочувствительными матрицами камер совпадают с зарегистрированными проекциями. Обсуждаются вопросы необходимости и достаточности проекционных данных для надежного определения внутренней структуры среды. Для оптимизации численных расчетов предлагается итеративный алгоритм вычисления максимального множества, а так же метод индексной оптимизации, позволяющий существенно сократить порядок операций при решении обратной задачи.

Работа проводилась при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00105), междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 14 “Обратные задачи и их приложения: теория, алгоритмы, программы”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хермен Г.Т. Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии. М.: Мир, 1983.
2. Лаврентьев М.М., Зеркаль С.М., Трофимов О. Е. Численное моделирование в томографии и условно-корректные задачи. Новосибирск: Изд-во ИДМИ НГУ, 1999.
3. Raffel M., Willet C.E., Wereley S.T., Kompenhans J. Particle Image Velocimetry. Practical Guide. Berlin: Springer, 2007.
4. Бильский А.В., Ложкин В.А., Маркович Д.М., Токарев М.П., Шестаков М.В. Оптимизация и тестирование томографического метода измерения скорости в объеме потока // Теплофизика и аэромеханика. 2011. Т. 18, № 4. С. 555-566.

**МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ  
МЕТОДА МАКСИМУМОВ МОДУЛЕЙ  
ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ**

Бондаренко А.Н., Иванов В.В.

*Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск  
me@un1or.name*

В настоящее время теория фракталов и мультифракталов широко используется для описания самоподобия и сложного скейлинга, наблюдаемых в самых разных физических ситуациях [1].

В данной работе было рассмотрено несколько примеров применения метода максимумов модулей вейвлет-преобразования (ММВП) для количественного описания эффектов хаотической и стохастической синхронизации нелинейных динамических систем.

Для изучения явления синхронизации хаоса нами была выбрана модель двух взаимодействующих систем Ресслера

$$\begin{aligned}\frac{dx_{1,2}}{dt} &= -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \gamma(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \frac{dy_{1,2}}{dt} &= \omega_{1,2}x_{1,2} + Ay_{1,2}, \\ \frac{dz_{1,2}}{dt} &= B + z_{1,2}(x_{1,2} - \mu),\end{aligned}\tag{1}$$

где параметры  $A$ ,  $B$  и  $\mu$  определяют режим динамики каждой системы,  $\gamma$  — параметр связи,  $\omega_1 = \omega_0 + \delta$ ,  $\omega_2 = \omega_0 - \delta$  — базовые частоты,  $\delta$  — расстройка между ними. Анализ различных режимов хаотических колебаний в системе (1) показал, что степень мультифрактальности значительно меньше для любого типа синхронной динамики по сравнению со степенью мультифрактальности в режимах вне области синхронизации. Применение метода ММВП позволяет рассматривать синхронизацию хаоса как эффект перехода от сложной мультифрактальной динамики, характеризующейся широким спектром гильбертовских экспонент, к более простой монофрактальной динамике, описываемой одним показателем скейлинга.

Нами был разработан программный комплекс для проведения мультифрактального анализа методом ММВП и проведено его тестирование при описании известных явлений динамики нелинейных систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00105), междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 14 “Обратные задачи и их приложения: теория, алгоритмы, программы”.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Павлов А.Н., Анищенко В.С. Мультифрактальный анализ сложных сигналов // Успехи физ. наук. 2007. Т. 177, № 8. С. 859–876.

## О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ

Бондаренко А.Н., Иващенко Д.С.<sup>1</sup>

*Институт математики им. Соболева СО РАН, Новосибирск*

<sup>1</sup> *ООО “Уфимский НТЦ”, Уфа*

*bondarenkoan1953@mail.ru, stanger.dmitry@gmail.com*

В работе представлен подход к численному решению многомерных уравнений с дробной производной [1] по времени на основе метода конечных элементов. Для уравнения

$$\frac{\partial^\alpha u(x, y, t)}{\partial t^\alpha} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1)$$

в области  $\Omega_1 = [0, L] \times [0, L]$  рассматривается задача

$$\begin{aligned} u|_{\partial\Omega} &= 0, & t > 0, \\ u(x, y, 0) &= f(x, y), & (x, y) \in \overline{\Omega}_1, \end{aligned} \quad (2)$$

и в области  $\Omega_2 = \{(x, y) : x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1\}$  рассматривается задача

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} &= 0, & \{x = 0, 0 < y < 1\} \cup \{y = 0, 0 < x < 1\}, & t > 0, \\ u(x, y, t) &= g_1(x, y), & x^2 + y^2 = 1, & t > 0, \\ u(x, y, 0) &= g_2(x, y), & (x, y) \in \overline{\Omega}_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Задача (1), (2) при условиях

$$f(x, y) = \sin(\pi x/L) \sin(\pi y/L), \quad L = 1, \quad a^2 = \pi^{-2}, \quad (4)$$

имеет точное решение  $u^*(x, y, t) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) E_\alpha(-2t^\alpha)$ , где  $E$  — функция Миттага — Леффлера [1].

Задача (1), (3) при условиях

$$g_1(x, y) = J_0(1) E_\alpha(-t^\alpha), \quad g_2(x, y) = J_0(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad (5)$$

имеет точное решение  $u^*(x, y, t) = J_0(\sqrt{x^2 + y^2}) E_\alpha(-t^\alpha)$ , где  $J$  — функция Бесселя первого рода.

При помощи модифицированного метода конечных элементов [2] построены численные решения задач (1), (2), (4) и (1), (3), (5) и показано хорошее соответствие приближенных результатов точным решениям.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
2. Sun H.G., Chen W., Sze K.Y. A semi-analytical finite element method for a class of time-fractional diffusion equations // Prepr. <http://arxiv.org/abs/1109.0641>.

**ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ  
ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДАННЫМИ КОШИ  
НА ЧАСТИ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА**

Боричевская А.Г.

*Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск  
albina\_bor@mail.ru*

В работе рассматривается параболическое уравнение вида

$$u_t - Lu = f(x, t), \quad (x, t) \in Q = G \times (0, T), \quad (1)$$

где  $L$  — эллиптический оператор второго порядка и  $G = \Omega \times (0, d)$  ( $\Omega$  — ограниченная область в пространстве  $\mathbb{R}^{n-1}$ ). Пусть  $\Gamma = \partial G$  и  $S = \Gamma \times (0, T)$ . Положим  $S_0 = \{(x, t) \in \partial Q : x_n = 0\}$ ,  $S_2 = \{(x, t) \in \partial Q : x_n = d\}$ ,  $S_1 = \partial\Omega \times (0, d) \times (0, T)$ . Уравнение (1) дополняется начально-краевыми условиями

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} \Big|_{x_n=0} = \psi(x', t), \quad u|_{S_0} = \varphi_0(x', t) \quad (x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})), \quad (2)$$

$$u|_{S_1} = \varphi_1(x, t), \quad u_{x_n}|_{S_2} = \varphi_2(x', t) \quad (3)$$

или

$$u|_{S_1} = \varphi_1(x, t), \quad u|_{S_2} = \varphi_2(x, t). \quad (4)$$

Мы рассматриваем обратную задачу об определении вместе с решением  $u$  уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2), (3) или условиям (2), (4), неизвестной функции  $q(x', t)$ , которая присутствует как множитель в выражении  $Lu$ . Таким образом, оператор  $L$  имеет вид

$$Lu = L_0u + qL_1u, \quad L_ku = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^k(x, t)u_{x_i x_j} + \sum_{k=1}^n b_i^k(x, t)u_{x_i} + c^k(x, t)u, \quad k = 0, 1.$$

Такие обратные задачи и близкие к ним возникают при описании процессов теплопереноса, диффузионных процессов, процессов фильтрации и во многих других областях.

При определенных условиях на данные задачи мы показываем, что решение задач (1)-(3) и (1), (2), (4) существует локально по времени и единственно. Устанавливается также, что решение непрерывно зависит от данных задачи. В качестве основных пространств берутся пространства С.Л. Соболева, а функция  $q$  ищется в пространстве непрерывных функций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-00260а).

## О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Бризицкий Р.В., Згонник А.С.

*Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток*  
*mlnwizard@mail.ru*

Исследуется разрешимость краевой и экстремальной задач для гармонических по времени уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} - i\omega\mu\mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} + i\omega\varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{J}, \quad (1)$$

рассматриваемых в ограниченной области  $\Omega$  с липшицевой границей  $\Gamma$  при следующих граничных условиях:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n} + i\alpha\mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}) = \mathbf{h} \text{ на } \Gamma. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  – векторы напряженностей электрического и магнитного полей,  $\mathbf{J}$  – заданная плотность электрических токов,  $\varepsilon$  и  $\mu$  – постоянные электрическая и магнитная проницаемости,  $\omega$  – круговая частота,  $i$  – мнимая единица,  $\mathbf{n}$  – единичный вектор внешней нормали к границе  $\Gamma$ ,  $\alpha$  и  $\mathbf{h}$  – заданные на  $\Gamma$  функции,  $\alpha$  – поверхностный импеданс границы  $\Gamma$ .

Следуя [1,2], доказывается разрешимость краевой задачи и задачи управления для уравнения (1). Роль управлений играют граничные функции  $\alpha$  и  $\mathbf{h}$ . Используя полученные в [2] априорные оценки, а так же некоторые идеи и результаты [3], устанавливаются условия на исходные данные задачи (1), (2), при которых ее решение принадлежит пространству  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  и выводится соответствующая априорная оценка. Доказана разрешимость задачи управления и на решении краевой задачи из пространства  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ . Для экстремальной задачи выводится система оптимальности и устанавливаются условия локальной единственности ее решения.

Работа проводилась при частичной поддержке гранта РФФИ (проект 10-01-00219-а), Совета по грантам Президента РФ (МК-3311.2011.1) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (№ 16.740.11.0565).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бризицкий Р.В., Савенкова А.С. Обратные экстремальные задачи для уравнений Максвелла // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50, № 6. С. 1038-1046.
2. Алексеев Г.В., Бризицкий Р.В. Теоретический анализ экстремальных задач граничного управления для уравнений Максвелла // Сиб. журн инд. мат. 2011. Т. 14, № 1. С. 3-16.
3. Casoni F., Colton D. A uniqueness theorem for an inverse electromagnetic scattering problem in inhomogeneous anisotropic media // Proc. Edinburg Math. Soc. 2003. V. 46. P. 293–314.

## МНОГОШАГОВЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Булатов М.В., Будникова О.С<sup>1</sup>

*Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск*

<sup>1</sup>*Восточно-Сибирская государственная академия образования, Иркутск*

*osbud@mail.ru, mvbul@icc.ru*

В докладе рассмотрены системы интегральных уравнений вида

$$A(t)x(t) + \int_0^t K(t,s)x(s)ds = f(t), 0 \leq s \leq t \leq 1, \quad (1)$$

с условием

$$\det A(t) \equiv 0,$$

где  $A(t)$  и  $K(t,s)$  – матрицы размерности  $(n \times n)$ ,  $f(t)$  и  $x(t)$  –  $n$ -мерные известная и искомая вектор-функции.

Такие задачи принято называть интегро-алгебраическими уравнениями.

Для численного решения задачи (1) сконструированы многошаговые методы основанные на явных методах типа Адамса и экстраполяция формулах, которые имеют вид:

$$A_{i+1} \sum_{j=0}^k \alpha_j x_{i-j} + h \sum_{l=0}^i \omega_{i+1,l} K_{i+1,l} x_l = f_{i+1}.$$

В докладе выделен класс задач (1), для которых доказана сходимость предлагаемых методов и показано, что данные методы обладают свойством саморегуляризации, а параметром регуляризации является шаг сетки, определенным образом связанный с уровнем погрешности правой части рассматриваемой системы.

Исследования поддержаны грантом РФФИ № 10-01-00571а.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Апарцин А.С., Бакушинский А.Б.* Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра 1 рода методом квадратур // Дифференциальные и интегральные уравнения. Иркутск: Изд-во ИГУ, 1972. Вып. 1. С. 248-258.
2. *Булатов М.В., Будникова О.С.* Численное решение интегро-алгебраических уравнений многошаговыми методами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52, № 5. С. 829-839.
3. *Чистяков В.Ф.* О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах // Функции Ляпунова и их применения. Новосибирск: Наука, 1987. С. 231-239.

**ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ  
СТАРШЕГО КОЭФФИЦИЕНТА УРАВНЕНИЯ  
КОНВЕКЦИИ – ДИФФУЗИИ – РЕАКЦИИ**

Вахитов И.С.

*Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток  
iv7180@gmail.com*

Настоящая работа посвящена численному анализу задачи идентификации старшего коэффициента для уравнения конвекции-диффузии-реакции, рассматриваемого в ограниченной области  $\Omega$  пространства  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ . Прямая краевая задача заключается в нахождении пары функций  $(\varphi, \lambda)$  по дополнительным измерениям в некоторой подобласти  $Q \subset \Omega$  из соотношений

$$-\operatorname{div}(\lambda \nabla \varphi) + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi + \kappa \varphi = f, \quad \varphi|_{\Gamma} = \psi \quad (1)$$

и дополнительном условии  $\varphi = \varphi_d$  в  $Q$ , где  $\varphi_d$  – заданная в  $Q$  функция.

Рассматриваемая задача идентификации сводится к задаче нахождения условного минимума функционала

$$J(\varphi, \lambda) = \frac{\mu_0}{2} \|\varphi - \varphi_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\mu_1}{2} \|\lambda\|_{H^s(\Omega)}^2. \quad (2)$$

Здесь  $s > d/2$  – заданный параметр.

С использованием предложенных в работах [1,2] методов обосновывается применение принципа неопределенных множителей Лагранжа и выводится система оптимальности. С учетом свойств системы оптимальности разрабатывается численный алгоритм, основанный на методе Ньютона. Исследуются свойства данного алгоритма, устанавливаются достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие его сходимость, обсуждаются результаты проведенных вычислительных экспериментов.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 10-01-00219-а и № 11-01-98508-р\_восток\_а.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Алексеев Г.В., Терешко Д.А.* Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008. 364 с.
2. *Вахитов И.С.* Обратная задача идентификации старшего коэффициента в уравнении диффузии – реакции // Дальневост. матем. журн. 2010. Т. 10, № 2. С. 93–105.

## ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ ГИДРАВЛИКИ ОТКРЫТЫХ РУСЕЛ И ТРУБОПРОВОДНОГО ТРАНСПОРТА

Воеводин А.Ф., Никифоровская В.С.

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск  
vovodin@hydro.nsc.ru*

В работе рассматриваются задачи идентификации параметров моделей гидравлики открытых русел и трубопроводного транспорта. Эти задачи, как правило, относятся к классу обратных. Их основная особенность связана с необходимостью определения (восстановления) параметров моделей, которые непосредственно не могут быть измерены.

В задачах гидравлики открытых русел к таким параметрам обычно относят, например, коэффициенты шероховатости водотоков и коэффициенты ветрового напряжения; в задачах же гидравлики трубопроводных систем – коэффициенты гидравлического сопротивления (формула Дарси-Вейсбаха) и теплообмена (формула Ньютона). В обоих случаях успешное решение задачи восстановления недостающих параметров модели позволяет свести к минимуму отклонение расчетных параметров от натурных измерений при стационарных и нестационарных режимах течения.

В работе дается краткий обзор задач, тесно связанных с задачами идентификации, особенно с задачами гидравлики трубопроводного транспорта – наиважнейшими в настоящем и ближайшем будущем времени. Трубопроводная система представляет собой сложный инженерный комплекс, состоящий из множества промежуточных звеньев, каждое из которых может быть причиной создания аварийных ситуаций. Из-за многообразия аварийных ситуаций ни один из известных методов предупреждения и ликвидации аварий не является универсальным. В этой связи возникает интересный класс задач, связанных с разработкой методов обнаружения мест утечек (несанкционированных отборов) нефти или газа в системе трубопроводов.

В данной работе приводятся примеры решения некоторых задач по восстановлению параметров гидравлических систем, обеспечивающих более высокую надежность их проектирования и эксплуатации.

Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН на 2012 год № 4.8.

**СХЕМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ В СМЕШАННОМ МЕТОДЕ  
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
ТЕПЛОПЕРЕНОСА**

Воронин К.В.

*ИВМиМГ СО РАН, НГУ, Новосибирск*

*kvoronin@labchem.ssc.ru*

В данной работе предложены двумерные и трехмерные схемы расщепления для сеточной системы, полученной при аппроксимации уравнения теплопроводности с помощью смешанного метода конечных элементов [1]. Таким образом, в основе предложенных алгоритмов лежат сеточные аппроксимации системы уравнений первого порядка в терминах “температура – тепловой поток”, записанных в слабой смешанной формулировке. Для пространственной аппроксимации используются элементы Равьяра-Тома наименьшей степени. Для предложенных алгоритмов приведены сравнительные результаты по точности и замеры производительности. Кроме того, приведены результаты применения самого эффективного из предложенных алгоритмов для решения практической задачи – моделирования термохронологии Nb-месторождения им. Малышева (в двумерной постановке).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ 10-01-00102а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Laevisky Yu.M., Voronin K.V.* On splitting schemes in the mixed finite element method // *Siberian J. Num. Math.*, 2012. V. 15, №. 2. P. 101-107.

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Гадильшина В.Р.

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт механики и машиностроения Казанского научного центра  
Российской академии наук, Казань  
venera-gadilshina@mail.ru*

В настоящей работе рассматривается задача оценки теплофизических и фильтрационных параметров нефтяных пластов на основе термогидродинамических исследований скважин [1,2]. Для решения задачи имеется два подхода: проведение эксперимента в естественных условиях массива или моделирование естественных термодинамических условий для горной породы в лабораторных условиях. Основная масса информации о теплофизических свойствах горных пород поступает из экспериментов, проводимых в лабораторных условиях, которые имеют высокую точность измерений. Однако различие лабораторных условий проведения эксперимента и естественных условий горных пород в массиве ограничивает, а в ряде случаев и исключает использование лабораторных измерений для практических целей.

В работе строится математическая модель для описания термодинамических процессов в нефтяном пласте с учетом влияния объема ствола скважины. Проводится анализ влияния эффекта адиабатического расширения жидкости, дроссельного эффекта, коэффициента проницаемости пласта, а также состояния призабойной зоны скважины на изменение температуры на забое скважины после ее пуска. Предлагается вычислительный алгоритм для обработки результатов измерений, полученных при эксплуатации вертикальных нефтяных скважин, на основе метода Левенберга-Марквардта.

По предложенной методике проводится интерпретация кривых изменения температуры и давления, зарегистрированных в скважине № 2030 РТ.

Работа проводилась при частичной поддержке РФФИ (грант 12-01-97005-р\_поволжье\_а).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чекалюк Э.Б. Термодинамика нефтяного пласта. М.: Недра, 1965. 238 с.
2. Бадертдинова Е.Р., Хайруллин М.Х., Шамсиев М.Н. Термогидродинамические исследования вертикальных нефтяных скважин // Теплофизика высоких температур. 2011. Т. 49, № 5. С. 795-798.

**ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ  
СВЕТОРАССЕЯНИЯ ДЛЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ  
ЭРИТРОЦИТОВ ЧЕЛОВЕКА**

Гилев К.В.<sup>1,2</sup>, Юркин М.А.<sup>1,2</sup>, Мальцев В.П.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт химической кинетики и горения СО РАН,

ул. Институтская 3, Новосибирск, 630090, Россия

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет,

ул. Пирогова 2, Новосибирск, 630090, Россия

*kgilev@gmail.com*

Эритроцит может быть представлен двояковогнутым диском, оптическая модель которого содержит 4 параметра (объем  $V$ , площадь  $S$ , угол ориентации относительно падающего излучения  $\beta$ , показатель преломления  $n$ ). Обратная задача состоит в определении параметров модели эритроцита по измеренной индикатрисе светорассеяния. Практическое применение решения предполагает анализ со скоростью  $10^2 - 10^3$  клеток в секунду. В связи с тем, что численное решение прямой задачи на современном персональном компьютере, используя, например, метод дискретных диполей [2], занимает около 1 минуты, решение обратной задачи с помощью метода подгонки практически не применимо. Решение обратной задачи осуществляется с помощью интерполяции на предварительно рассчитанной сетке, содержащей порядка  $2 \cdot 10^5$  узлов. Заполнение базы данных осуществляется с помощью адаптивного метода.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *V. P. Maltsev* Scanning flow cytometry for individual particle analysis // Rev. Sci. Instrum. 2000. № 71, P. 243–255 (2000).
2. *Yurkin M.A. and Hoekstra A.G.* The discrete-dipole-approximation code ADDA: capabilities and known limitations // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 2011. № 112. P. 2234–2247 (2011).

**О СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКЕ ОШИБКИ ОПЕРАТОРА СЛАУ  
В ЗАДАЧЕ КАЛИБРОВКИ ЛАЗЕРНОГО ТОЛЩИНОМЕРА  
ГОРЯЧЕГО ПРОКАТА**

Главный В.Г., Двойнишников С.В., Пененко А.В.  
ИТ СО РАН<sup>1</sup>, ИВМиМГ СО РАН<sup>1</sup>, г. Новосибирск  
glavny@ngs.ru

Рассматривается статистический способ оценки ошибки матрицы плохообусловленной СЛАУ при решении задачи калибровки лазерного толщиномера горячего проката, состоящего из  $N$  дальномеров закрепленных на жесткой базе. Его калибровка производится эталонными пластинами заданной толщины. Результаты каждого  $i$ -го измерения (где  $i = 1..M$ ) геометрически связаны через СЛАУ:

$$\begin{cases} (\bar{r}_0^1, \bar{\pi}_i) + \lambda_i^1 \cdot (\bar{n}_0^1, \bar{\pi}_i) - (\rho_i + \delta^1 H_i) = 0, \\ \dots \\ (\bar{r}_0^N, \bar{\pi}_i) + \lambda_i^N \cdot (\bar{n}_0^N, \bar{\pi}_i) - (\rho_i + \delta^N H_i) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\bar{\pi}_i = (\phi_i + \eta_i^\phi; \psi_i + \eta_i^\psi; \omega_i + \eta_i^\omega)$  – измеренный вектор нормали пластины,  $\lambda_i^k = \lambda_i^k + \xi_i^k$  – показания  $k$ -го дальномера,  $H_i = H_i + \chi_i$  – толщина пластины. Необходимо найти  $\bar{z}_0 = \{k = 1..N; \bar{r}_0^k = (x_0^k, y_0^k, z_0^k); \bar{n}_0^k = l_0^k(\alpha_0^k, \beta_0^k, \gamma_0^k) : |(\alpha_0^k, \beta_0^k, \gamma_0^k)| = 1\}$ . Компоненты  $\bar{z}_0$  имеют ограничения, обусловленные сборкой и юстировкой толщиномера. Для исключения из задачи неизвестных значений  $\rho_i$  строится вспомогательная блочная матрица  $A_h$ , составленная из строк СЛАУ (1). Для неё запишем уравнение

$$A_h z = u_\delta, \quad (2)$$

$\text{cond}(A_h) \sim 10^4$  и с некоторых значений ( $\langle \eta_\phi^2 \rangle; \langle \eta_\psi^2 \rangle; \langle \eta_\omega^2 \rangle; \langle \xi_{1..N}^2 \rangle$ ), при заданных ограничениях на  $\bar{z}_0$ , уравнение становится несовместным. Задача (2) решается модифицированным обобщенным методом невязки, который состоит в поиске минимума функционала [1, 2]:

$$\min\{\|z\| : z \in D, \|A_h z - u_\delta\|^2 = (\delta + h\|z_\eta^\alpha\| + \mu_\eta^k(u_\delta, A_h))^2\}$$

Получена оценка  $h = \|A_h - A\|$  для случая когда  $(\eta_\phi; \eta_\psi; \eta_\omega; \xi_{1..N}; \chi)$  – выборки из независимых нормальных процессов с нулевым средним [3]. Полученная оценка  $h$  хорошо согласуется с результатами численных экспериментов.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Численные методы решения некорректных задач / Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. М.: Наука, 1990. С. 1-232.
2. Ягола А.Г., Некорректные задачи с априорной информацией // Сиб. электрон. матем. изв. 2010. № 7. С. 343–361.
3. Теремин В.Ю. Введение в статистическую теорию обратных задач. М.: Физматлит, 2005. С. 1-376.

## КОНЕЧНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ЗАДАЧИ РЕКОНСТРУКЦИИ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Грибанова Е.И.

*Уральский федеральный университет, Екатеринбург*  
*egribanova@list.ru*

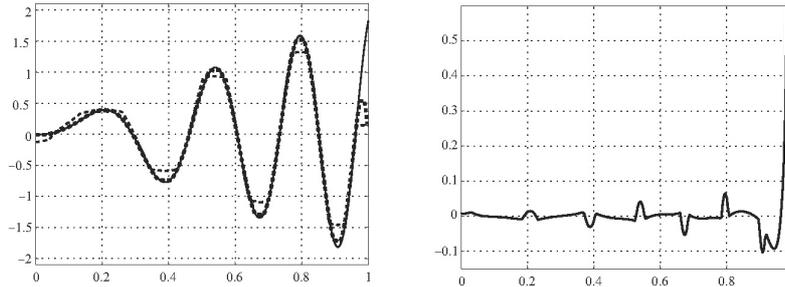
Рассматривается задача о восстановлении априори неизвестных граничных управлений в гиперболической системе по результатам приближенных измерений движений этой системы. Управляемая система представлена краевой задачей

$$y_{tt} = Ly + b(x)u(t), \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

$y(t_0, x) = y_0(x)$ ,  $y_t(t_0, x) = y_1(x)$ ,  $x \in \Omega$ ;  $\partial y / \partial N + \sigma y = g(x)u(t)$ ,  $t \in T$ ,  $x \in \partial\Omega$ , где  $L$  — эллиптический дифференциальный оператор,  $u(t)$  — вектор управляющего воздействия на систему, удовлетворяющий геометрическим ограничениям  $u(t) \in P \subset \mathbb{R}^m$ . Приближенные измерения движения удовлетворяют условию

$$\int_T \|y_\delta(t, \cdot) - y(t, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 dt + \int_T \|\dot{y}_\delta(t, \cdot) - \dot{y}(t, \cdot)\|_{W_2^1(\Omega)^*}^2 dt \leq \delta, \quad 0 \leq \delta \leq \delta_0.$$

Выполнена конечномерная аппроксимация задачи, основанная на методе разделения переменных. Доказана соответствующая теорема об аппроксимации. Проведены вычислительные эксперименты. На левом рисунке показаны модельное гладкое управление и результаты восстановления, на правом — погрешность восстановления. Работа продолжает исследования [1,2].



Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках” при поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1009) и поддержана РФФИ (проект 11-01-00073).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vasin V.V., Korotkii M.A. Tikhonov regularization with nondifferentiable stabilizing functional // J. of Inv. and Ill-Posed Prob. 2007. V. 15, N 8. P. 853–865.
2. Короткий А.И., Грибанова Е.И. Восстановление управлений в гиперболических системах методом Тихонова с негладкими стабилизаторами // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17. №. 1. С. 99–108.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК РАЗЛАГАЮЩИХСЯ  
МАТЕРИАЛОВ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОЦЕССОВ  
ТЕРМОХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ**

Грицевич И.В., Нетелев А.В.

*Московский авиационный институт  
(Национальный исследовательский университет)  
igrig@mail.ru, netelev@mail.ru*

В конструкциях теплозащитных покрытий теплонагруженных агрегатов широко используются разлагающиеся композиционные материалы: армированные (типа асбо-, стекло- и углепластиков), напыляемые, резиноподобные и т. д. Процессы теплопереноса в материалах различных композиций при их интенсивном нагреве и разрушении во многом схожи между собой.

На практике, часто невозможно измерить непосредственно теплофизические и термокинетические характеристики материалов. Единственный путь, для преодоления этих трудностей, это косвенные измерения. Данная работа посвящена вопросам идентификации математических моделей теплопереноса в разлагающихся теплозащитных материалах. Решением соответствующей обратной задачи является совокупность четырех теплофизических характеристик (теплоемкость, теплопроводность, теплоемкость фильтрующегося газа, тепловой эффект разложения). Устойчивость решения обратной задачи обеспечивается использованием метода итерационной регуляризации.

Для описания теплопереноса в разлагающихся материалах использовалась одномерная математическая модель:

$$c_l(T(\tau, x))\rho_l(T(\tau, x))\frac{\partial T(\tau, x)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_l(T(\tau, x))\frac{\partial T(\tau, x)}{\partial x} \right) + c_{g,l}(T(\tau, x)) \int_{x_i}^x \frac{\partial \rho_l(\xi, \tau)}{\partial \tau} d\xi \frac{\partial T(\tau, x)}{\partial x} + H_l(T(\tau, x))\frac{\partial \rho_l(x, \tau)}{\partial \tau} \quad (1)$$

$$(x, \tau) \in Q = (0, L) \times (0, \tau_m]$$

$$T(0, x) = T_0(x), 0 < x < L, \quad (2)$$

$$-\alpha_1 \lambda(T(0, \tau)) \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} + \beta_1 T(0, \tau) = q_1(T(0, \tau), \tau), \quad (3)$$

$$-\alpha_2 \lambda(T(L, \tau)) \frac{\partial T(L, \tau)}{\partial x} + \beta_2 T(L, \tau) = q_2(T(L, \tau), \tau). \quad (4)$$

Химическая кинетика разложения описана задачей Коши, ядром которой является уравнение Аррениусовского типа:

$$\rho(x, \tau_r) = \rho_0 \quad (5)$$

$$\rho(x, \tau_c) = \rho_c \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho(x, \tau)}{\partial \tau} = F = \begin{cases} 0, T(x, \tau) < T_r \\ -\rho^n A \exp\left(\frac{-E}{RT(x, \tau)}\right), \rho(x, \tau) > \rho_c, T(x, \tau) \geq T_r \\ 0, \rho(x, \tau) \leq \rho_c \end{cases} \quad (7)$$

Необходимая для решения обратной задачи дополнительная информация получена в результате температурных измерений в некоторых точках  $x_m, m = \overline{1, M}$  области  $Q = (0, L) \times (0, \tau_m]$ .

$$T(x_m, \tau) = f_m(\tau), m = \overline{1, M} \quad (8)$$

где  $x_m$  – координата  $m$ -й точки, в которой производится измерение температуры.

## ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ О ГРАНИЧНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Дементьева Е.В., Кареева Е.Д.

*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск*

*e.v.dementyeva@icm.krasn.ru*

Прямая задача для уравнений мелкой воды ставится на сфере в области произвольной формы с достаточно гладкой границей. Граница области состоит из “твёрдых” участков — береговой линии и “жидких” участков — граница по морю. После дискретизации задачи по времени на каждом временном шаге в области ставится обратная задача о восстановлении граничной функции, для решения которой используются методы оптимизации и теории управления. Проблема состоит в том, что в общем случае влияние океана на открытую часть границы по морю неизвестна, то есть граничные условия на “жидкой” границе содержат граничную функцию, которую следует найти вместе с неизвестными задачи — скоростями и возвышением свободной поверхности.

Для построения численного алгоритма задача переформулирована в виде семейства задач оптимального управления, для отыскания минимума в некоторой норме погрешности между искомым возвышением свободной поверхности и наблюдаемым.

Построен и обоснован итерационный численный алгоритм, использующий информацию о данных наблюдений о возвышении свободной поверхности на части жидкой границы для восстановления граничной функции на всей жидкой границе и, следовательно, поля скоростей и возвышения свободной поверхности во всей расчетной области. Метод состоит в итерационном уточнении граничной функции путем численного решения последовательно прямой и сопряженной задач.

Поскольку задача некорректна, то рассмотрено несколько подходов к её регуляризации. Был осуществлен поиск граничной функции  $d$  из трех различных функциональных пространств. Показаны сильные и слабые стороны каждого регуляризатора. Для этого изучалось поведение алгоритма восстановления граничной функции по данным наблюдений различной гладкости — гладким, с наложением белого шума, с пропусками в данных наблюдений.

Создано и оттестировано параллельное программное обеспечение, решающее описанную задачу с помощью метода конечных элементов на неструктурированной согласованной триангуляции расчетной области. Проведены тестовые расчеты по восстановлению данных для акватории Охотского моря.

Для эффективного использования SMP-узловых кластеров исследовано на эффективность несколько хорошо масштабируемых параллельных численных реализаций решения задачи для библиотек MPI, OpenMP, и для их совместного использования. Получены теоретические оценки потенциального ускорения предложенных параллельных алгоритмов. Показано, что реально наблюдаемое ускорение параллельной реализации близко к теоретически ожидаемому.

Работа выполнялась при поддержке РФФИ (грант № 11-01-00224-а).

## ОБРАБОТКА ДАННЫХ ПАССИВНОГО СЕЙСМИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА В РАЙОНЕ ЭПИЦЕНТРА ЧУЙСКОГО ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ

Дергач П.А.

*ИНГГ СО РАН им. А.А. Трофимюка, Новосибирск*

*dergachpa@ipgg.nsc.ru*

На юге Республики Алтай 27 сентября 2003 г. произошло сильное землетрясение с магнитудой 7.3 и эпицентром в районе поселка Бельтир, афтершоки которого фиксируются до сих пор. С 2007 по 2010 г. включительно ИНГГ СО РАН совместно со СНИИГГиМС проводили работы по пассивному сейсмическому мониторингу в этой зоне [1]. Каждый год запись велась сеансами в течение нескольких дней, каждый сеанс непрерывной записи составлял 100 сек.

Был проведен визуальный анализ и сортировка сейсмограмм на пять классов событий: искусственные воздействия (взрывы, удары кувалдой), удаленные события (с фронтом близким к плоской волне), одиночные глубинные события, техногенные и природные помехи (автомобили, грозы, шумы на профиле), сейсмограммы без каких-либо визуально заметных событий (микросейсмический шум).

Сейсмограммы из последней группы были обработаны методом эмиссионной томографии [2]. Этот метод состоит в переборе возможных положений источника по регулярной сетке. Для каждого положения источника рассчитывается годограф прямой волны для косы сейсмических приемников и производится суммирование сейсотрасс вдоль этого годографа. Положениям максимумов спектра когерентности соответствуют зонам сейсмической активизации.

Каждая сейсмограмма обрабатывалась отдельно, а результаты для каждого года суммировались и анализировались. Для сравнения результатов было необходимо учитывать различное расположение сейсмоприемников в разные годы. Кроме того, было изучено влияние гармонических и случайных шумов на результат локации, и показано, что гармонические помехи создают ложные максимумы в спектре когерентности. В работе приведены суммарные результаты локации для 2007, 2008 и 2009 годов и произведено их сравнение, по результатам которого пока не удалось сделать каких-либо выводов о точном положении зоны трещиноватости.

Работа проводилась при частичной поддержке в рамках ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (ГК № 14.740.11.0425 от 04.10.10 и ГК № П1178 от 03.06.2010).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Куликов В.А., Хогоев Е.А., Нефедкина Т.В., Сагайдачная О.М., Дунаева К.А., Сальников А.С.* Технология и результаты исследований сейсмического шума в зоне главного разрыва разрушительного Чуйского землетрясения 2003 г. // Приборы и системы развед. геоф. 2008. №. 2. С. 26-32.
2. *Александров С.И.* Пассивный сейсмический мониторинг. О методике сейсмоземиссионной томографии // Геофизика. 2010. №. 4. С. 26–30.

## ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ В ЗАДАЧАХ ТОМОГРАФИИ 2-ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ

Деревцов Е.Ю.

*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск  
dert@math.nsc.ru*

В последние годы исследования векторных или тензорных характеристик сред томографическими методами интенсивно развиваются в применении, например, к диагностике потоков жидкости или газа; изучению анизотропных свойств промышленных материалов, земных пород и микрообъектов; медицинской диагностике.

Рассматривается задача тензорной томографии, состоящая в определении симметричного 2-тензорного поля или его части по известным лучевым преобразованиям: продольному, поперечному или смешанному. Известно, что лучевые преобразования, действующие на симметричные 2-тензорные поля, обладают ненулевыми ядрами, структура которых тесно связана с разложением поля на соленоидальную и две (различные) потенциальные части. Таким образом, если известно одно из трех возможных лучевых преобразований, то однозначно восстановить можно лишь часть исходного поля.

Отмеченное обстоятельство приводит к существенным особенностям при использовании численных методов в задачах тензорной томографии. Так, алгоритмы, основанные на различных вариантах полученных для 2-тензорных полей формул обращения, приводят либо к восстановлению компонент соответствующей части поля, либо к определению потенциалов и, уже на их основе, построению искомого компонента.

Использование метода наименьших квадратов возможно в двух вариантах. Применение специальных построенных, соленоидальных или потенциальных базисов, напрямую приводит к построению аппроксимации соответствующей части поля. Использование же, например, покоординатных базисов приводит к необходимости численного решения краевых задач для эллиптических систем, с целью выделения из полученной МНК-аппроксимации нужной части тензорного поля. Метод сингулярного разложения операторов лучевых преобразований также имеет свои особенности в применении к задачам тензорной томографии. Необходимо построение сингулярного разложения каждого из операторов продольного, поперечного и смешанного лучевого преобразований, отображающих, соответственно, подпространства соленоидальных и потенциальных полей двух типов в пространства их образов.

Работа выполнена при частичной поддержке Отделения математических наук РАН (проект 1.3.1), РФФИ (проект № 11-07-00447), СО РАН (проект совместных фундаментальных исследований СО РАН и УрО РАН № 32).

## О НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Дженалиев М.Т., Иманбердиев К.Б., Айменова К.

*Институт математики, информатики и механики, Алматы*

*mwasharkhan@gmail.com*

Интерес к задачам, не являющимся корректными по Ж.Адамару [1], у специалистов по уравнениям математической физики никогда не ослабевал. С ними приходится сталкиваться во многих прикладных задачах. Здесь можно отметить классические работы Ж.Адамара [1], А.Н.Тихонова [2], М.М. Лаврентьева [3] и многих других, обративших внимание исследователей на некорректные задачи и внесших существенный вклад в развитие этого важного направления математики.

Некорректные задачи для уравнения Лапласа рассматривались многими авторами. Дадим следующую постановку граничной задачи для бигармонического уравнения.

В области  $\Omega = \{x, y | 0 - x - 2\pi, 0 - y - 1\}$  рассматривается следующая граничная задача

$$\Delta^2 u = f, \quad \{x \in (0, 2\pi), y \in (0, 1)\} = Q; \quad (1)$$

$$u^{(j)}(0, y) = u^{(j)}(2\pi, y), \quad j = \overline{0, 3}; \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_{yy}(x, 0) = 0, \quad u_{yy}(x, 1) = 0, \quad (3)$$

с дополнительным условием

$$u(x, 1) \in \mathcal{U}_g - \text{выпуклое замкнутое множество из } L_2(0, 2\pi). \quad (4)$$

Предполагается, что данные в задаче (1)–(3) удовлетворяют следующим условиям:

$$f \in L_2(\Omega), \quad \varphi_1 \in L_2(0, 2\pi). \quad (5)$$

Используя методы оптимального управления для задачи (1)–(5), мы устанавливаем критерий однозначной сильной разрешимости некорректной граничной задачи (1)–(3) в терминах коэффициентов Фурье от заданных функций (5). Этот критерий раскрывает причину некорректности, возникающей в задаче (1)–(3).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978, 352 с.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 142 с.
3. Лаврентьев М.М. О задаче Коши для уравнения Лапласа. // Изв. АН СССР. Сер. Математика. 1956. Т. 20, № 6. С. 819–842.

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПО СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Дженалиев М.Т., Иманбердиев К.Б., Рамазанов М.И., Жанадил А.Т.

*Институт математики, информатики и механики, Алматы*

*mvasharkhan@gmail.com*

В работе исследуются вопросы разрешимости задачи стабилизации с границы для нагруженного уравнения теплопроводности в заданной ограниченной области  $\Omega \equiv (-\pi/2, \pi/2)$ . Смысл задачи заключается в выборе граничного условия (управления), чтобы решение полученной смешанной краевой задачи стремилось при  $t \rightarrow \infty$  к заданному стационарному решению с предписанной скоростью  $\exp(-\sigma_0 t)$ . При этом требуется, чтобы управление было с обратной связью, т. е. чтобы оно реагировало на непредусмотренные флуктуации системы, подавляя результаты их воздействия на стабилизируемое решение [1, 2].

**Постановка задачи.** Найти такие граничные управления  $u_j(t) \in L_2(0, \infty)$ ,  $j = 1, 2$ , чтобы решение  $y(x, t)$  начально-граничной задачи

$$y_t(x, t) - y_{xx}(x, t) + \alpha \cdot y(0, t) = 0, \quad \{x, t\} \in Q, \quad (1)$$

$$y(-\pi/2, t) = u_1(t), \quad y(\pi/2, t) = u_2(t),$$

$$y(x, 0) = y_0(x),$$

стремилось к нулю при  $t \rightarrow \infty$  следующим образом:

$$\|y(x, t)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)} \leq C_0 e^{-\sigma_0 t},$$

где  $Q = \{x, t \mid -\pi/2 < x < \pi/2, t > 0\}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\sigma_0$  — заданное положительное число,  $y_0(x) \in L_2(-\pi/2, \pi/2)$  — заданная функция. Уравнение (1) называют нагруженным [3].

Отметим, что обратным задачам дифференциальных уравнений посвящена обширная литература (см. 2 и список литературы).

В докладе рассматриваются вопросы разрешимости поставленной задачи и метод ее приближенного решения. Используются результаты работ [1, 3].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фурсиков А.П.* Стабилизируемость квазилинейного параболического уравнения с помощью граничного управления с обратной связью // Матем. сборник. 2001. Т. 192, № 4. С. 115–160.
2. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. 249 с.
3. *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* Нагруженные уравнения как возмущения интегральных уравнений. Алматы: ФЫЛЫМ, 2010. 335 с.

**ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ  
ВОЛН В ЭФФЕКТИВНОЙ МОДЕЛИ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ  
С СИСТЕМОЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТРЕЩИН**

Дугаров Г.А.

*Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука,  
Новосибирск  
geserdugarov@gmail.com*

Решаются прямая и обратная задачи о распространении волн в поглощающей трансверсально-изотропной среде (ТИ), являющейся эффективной моделью изотропной среды с системой параллельных трещин (с осью симметрии, перпендикулярной плоскостям трещин). Трещины описываются моделью с линейным проскальзыванием [1]. Поглощение вводится посредством комплекснозначного тензора модулей упругости–поглощения [2], включающего в себя скорости в изотропной среде и четыре константы, характеризующие трещины: действительные и мнимые части нормальной  $\tilde{\Delta}_N = \Delta_N + i\Delta_N^I$  и касательной  $\tilde{\Delta}_T = \Delta_T + i\Delta_T^I$  ослабленностей.

Прямая задача состоит в нахождении фазовых скоростей и поглощения волн трех типов: qP, qSV, SH. Исследуется зависимость анизотропии скоростей  $V(\alpha)$  и поглощения  $Q^{-1}(\alpha)$ , где  $\alpha$  — угол между волновой нормалью и осью симметрии среды, от параметров модели:  $\gamma = V_{S,iso}/V_{P,iso}$ ,  $\Delta_N$ ,  $\Delta_T$ ,  $\Delta_N^I$ ,  $\Delta_T^I$ .

Выявлено, что функции  $V(\alpha)$  и  $Q^{-1}(\alpha)$  для qP- и qSV-волн зависят главным образом от нормальной ослабленности  $\tilde{\Delta}_N$  и в меньшей степени от касательной  $\tilde{\Delta}_T$ . Для SH-волн скорости  $V(\alpha)$  и поглощение  $Q^{-1}(\alpha)$  зависят лишь от касательной ослабленности  $\tilde{\Delta}_T$ . Увеличение параметра  $\gamma$  приводит к усилению всех характерных особенностей на графиках  $V_{qP,qSV}(\alpha)$  и  $Q_{qP,qSV}^{-1}(\alpha)$ .

Обратная задача решается методом наименьших квадратов, минимизируемый функционал составлен из невязок между экспериментальными данными и теоретическими по скоростям и поглощению разных типов волн для некоторого интервала углов  $\alpha$ . Ищутся параметры:  $\Delta_N$ ,  $\Delta_T$ ,  $\Delta_N^I$ ,  $\Delta_T^I$ .

Анализ решения обратной задачи позволил сделать вывод о предпочтительности совместного обращения данных qP- и SH-волн. В случае использования данных только qP-волн хорошо определяются лишь нормальные ослабленности  $\tilde{\Delta}_N$ . Анизотропию скоростей и поглощения qSV-волны рекомендуется использовать только в случае слабой анизотропии, чтобы избежать петель на поверхностях лучевых скоростей qSV-волны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schoenberg M.* Elastic wave behavior across linear slip interfaces // J. Acous. Soc. Amer. 1980. V. 68. P. 1516–1521.
2. *Chichinina T., Obolentseva I., Gik L., Bobrov B., Ronquillo-Jarillo G.* Attenuation anisotropy in the linear-slip model: Interpretation of physical modeling data // Geophysics. 2009. V. 74. № 5. P. WB165–WB176.



**СТАЦИОНАРНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ  
В ГИДРОДИНАМИКЕ ДВУХСКОРОСТНЫХ СРЕД  
С ОДНИМ ДАВЛЕНИЕМ**

Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х.<sup>1</sup>, Коробов П.В.<sup>1</sup>

*НУУз имени Мирзо Улугбека,*

*механико-математический факультет, Ташкент,*

<sup>1</sup> *Институт вычислительной математики и математической  
геофизики Сибирского отделения РАН, Новосибирск  
itot@omzg.sccc.ru*

Двухскоростная гидродинамическая теория с условиями равновесия фаз по давлению, была построена в работе [1]

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div} (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} + \rho \mathbf{v}) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div} (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\bar{\rho}} + \frac{\tilde{\rho}}{2\bar{\rho}} \nabla (\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v})^2 + \mathbf{f}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{v}}, \nabla) \tilde{\mathbf{v}} = -\frac{\nabla p}{\tilde{\rho}} - \frac{\rho}{2\tilde{\rho}} \nabla (\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v})^2 + \mathbf{f}, \quad (3)$$

где  $\tilde{\mathbf{v}}$  и  $\mathbf{v}$  – вектора скорости подсистем, составляющих двухскоростной континуум с соответствующими парциальными плотностями  $\tilde{\rho}$  и  $\rho$ ,  $\bar{\rho} = \tilde{\rho} + \rho$  – общая плотность континуума;  $p = p(\bar{\rho}, (\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v})^2)$  – уравнение состояния континуума;  $\mathbf{f}$  – вектор массовой силы, отнесенной к единице массы.

В данной работе найдены новые законы сохранения для уравнения движения двухскоростной среды с одним давлением [2].

Работа проводилась при частичной поддержке РФФИ (грант № 12-01-00773-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Доровский В.Н., Перепечко Ю.В. Теория частичного плавления // Геология и геофизика. 1989. № 9. С. 56-64.
2. Жабборов Н.М., Коробов П.В., Имомназаров Х.Х. Применение дифференциальных тождеств Меграбова к уравнениям двухскоростной гидродинамики с одним давлением // Журнал СФУ. Сер. “Математика и физика”. 2012. Т. 5, № 2. С. 156-163.

**РЕАЛИЗАЦИЯ КОНЕЧНО-ОБЪЕМНОГО МЕТОДА  
ТИПА ГОДУНОВА ДЛЯ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОЙ  
УПРУГОСТИ НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ**

Желтяков Н.А.

*Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск  
zheltyakov.math@gmail.com*

В данной работе рассматривается модель нелинейной теории упругости, и реализуется конечно-объемный метод типа Годунова [1] на неструктурированной лагранжевой сетке. В качестве модели твердого гиперупругого тела используется термодинамически согласованная система законов сохранения [2]. Планируется проведение простейших тестовых трехмерных расчетов на тетраэдральных сетках.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *R.J. Leveque* Finite-volume methods for hyperbolic problems // Cambridge University Press, 2004.
2. *С.К. Годунов, И.М. Пешков* Термодинамически согласованная нелинейная модель упругопластичной среды Максвелла // Журн. выч. и мат. физ. 2010. Т. 50, № 8. С. 1481-1498.

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ  
ЗАДАЧ АТМОСФЕРНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСТВА**

Жидков А.А., Калинин А.В., Сумин М.И.

*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,**Нижний Новгород**Artem.Zhidkov@gmail.com*

Исследование электрических явлений, происходящих в атмосфере Земли, является достаточно актуальной современной проблемой [1]. Проверка различных гипотез затрудняется сложностью проведения натуральных экспериментов, которая в первую очередь связана с высокой динамикой атмосферы. Численные эксперименты позволяют решить круг вопросов, связанных с моделированием мезомасштабных процессов [2].

В настоящей работе обсуждаются математические модели глобальной электрической цепи в атмосфере Земли, описываемые квазистационарным электрическим приближением для системы уравнений Максвелла. Предлагается и обосновывается итерационный метод решения прямой задачи в терминах напряжённости электрического поля и вихря магнитного поля. Приводится численный алгоритм, основанный на методе Бубнова–Галёркина, позволяющий решать исследуемые классы задач в терминах скалярного потенциала электрического поля.

В работе изучается одна из обратных задач, находящих своё применение в теории атмосферного электричества – задача о восстановлении напряжённости сторонних электрических токов по данным граничного наблюдения. Для решения данной обратной задачи обосновывается итеративный метод двойственной регуляризации [3].

Для приведённых алгоритмов представлена численная реализация, и проведено решение некоторых прикладных задач теории глобальной электрической цепи в атмосфере.

Работа проводилась при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012–2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011) и гранта Правительства Российской Федерации (договор № 11.G34.31.0048).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мареев Е.А.* Достижения и перспективы исследований глобальной электрической цепи // *Успехи физических наук.* 2010. Т. 180, № 5. С. 527–534.
2. *Морозов В.Н.* Распределение электрического поля, создаваемого нестационарным током заряжения грозового облака в атмосфере с неоднородной электрической проводимостью // *Прикладная метеорология.* 2006. Вып. 7 (555). С. 51–67.
3. *Сумин М.И.* Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения // *Журн. вычисл. матем. и матем. физики.* 2004. Т. 44, № 11. С. 2001–2019.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ КАСКАДНОЙ ДИФРАКЦИИ В СЛОЯХ С  
“ЗАТЕНЯЮЩИМИ” ГРАНИЦАМИ В ТЕРМИНАХ МАТРИЧНЫХ  
ОПЕРАТОРОВ РАСПРОСТРАНЕНИЯ – ПОГЛОЩЕНИЯ**

Зятков Н.Ю., Айзенберг А.А.<sup>1</sup>, Айзенберг А.М.<sup>1</sup>,  
Романенко А.А., Андерссон Ф.<sup>2</sup>

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск;*

<sup>1</sup> *Институт нефтегазовой геологии и геофизики  
им. А.А. Трофимука СО РАН, Новосибирск;*

<sup>2</sup> *Университет Лунда, Швеция  
nikolay.zyatkov@gmail.com*

Сейсмический метод исследования недр Земли использует различные методы решения обратной задачи для послойного восстановления её структуры и свойств. Они основаны на подборе функции Грина для слоистых сред, наиболее совпадающей с наблюдаемым волновым полем. Поиск метода описания функции Грина, обеспечивающей допустимый компромисс между скоростью и точностью вычисления, остается актуальной проблемой математической волновой теории.

Недавно ИНГГ СО РАН был предложен аналитический подход к описанию функции Грина слоистой среды, основанный на фундаментальном решении для слоя и позволяющий построить реализуемое фундаментальное решение в виде суперпозиции функции Грина безграничного пространства и поля каскадной дифракции [1]. Поле каскадной дифракции подавляет все нефизические фрагменты в функции Грина с учетом формы границ и добавляет дифракционные волны, порожденные вогнутыми частями границ.

При численной реализации алгоритма возникают проблемы хранения и быстрой обработки больших объемов данных. Был предложен метод, позволяющий решить первую проблему, произведена реализация алгоритма для случая акустического полупространства с кривой границей в форме клина, гиперболического цилиндра, параболического цилиндра. Осуществлен перенос кода на параллельные архитектуры для CPU и произведена его оптимизация, что дало ускорение работы программы в 13.5 раз. Также посредством использования технологии NVIDIA CUDA алгоритм был реализован и оптимизирован для графических процессоров, что дало ускорение работы программы ещё более чем в 4 раза. Таким образом, время счёта алгоритма сокращено с 27 ч до 13 мин., общее ускорение составило ~ 125 раз по сравнению с последовательной программой, реализованной без оптимизации.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Айзенберг А.М., Айзенберг А.А.* Фундаментальное решение акустического волнового уравнения в полупространстве, удовлетворяющее интегральному условию поглощения на регулярной границе // Междунар. конф. “Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений”, посвященная 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева, 5-12 октября 2008, Новосибирск. С. 89.

**НЕКОТОРЫЕ СОВМЕЩЕННЫЕ ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ  
ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ДВУХФАЗНЫХ СРЕД**

Имомназаров Х.Х.

*Институт вычислительной математики и математической геофизики**СО РАН, Новосибирск**imom@omzg.ssc.ru*

Моделирование многофазных течений в настоящее время является одной из наиболее актуальных задач математики, механики, металлургии, биомеханики. Данная область исследований охватывает все больший диапазон научных и технических приложений.

Уравнения движения пористой флюидонасыщенной среды получены в терминах смещений [1], [2], и в терминах скоростей смещений [3], [5]. Основной особенностью этих моделей является то, что они предсказывают наличие дополнительной (медленной) продольной звуковой волны. Этот факт нашел экспериментальное подтверждение в работах Plona [5].

В докладе обсуждаются постановки совмещенных прямых и обратных задач для двухфазных сред.

Работа проводилась при частичной поддержке РФФИ (грант 12-01-00773-а).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Френкель Я.И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геоф. 1944. Т. 8, № 4. С. 133-146.
2. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid // J. Acoust. Soc. Amer. 1956. V.28, N 2. P. 168-191.
3. Доровский В.Н. Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика. 1989. №. 7. С. 39-45.
4. Доровский В.Н., Перепечко Ю.В. Феноменологическое описание двухфазных сред с релаксирующими касательными напряжениями // ПМТФ. 1992. № 3. С. 94-105.
5. Plona T.J. Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies // Appl. Phys. Lett. 1980. V. 36, N 4. P. 259-261.

**ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩЕГО АЛГОРИТМА  
ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ ОБРАТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ  
ЗАДАЧ ПОРОУПРУГОСТИ**

Имомназаров Х.Х., Янгибоев З.Ш.<sup>1</sup>

*Институт вычислительной математики и математической  
геофизики Сибирского отделения РАН, Новосибирск,*

<sup>1</sup> *Каршинский государственный университет, Карши*

*imom@otzg.sgcc.ru*

Пусть полупространство  $z > 0$  заполнено неоднородной пористой средой. Уравнения распространения сейсмических SH волн с учетом поглощения энергии, обусловленной коэффициентом межкомпонентного трения  $b(z)$ , имеют вид [1], [2]

$$\rho_s(z) u_{tt} = (\mu(z) u_z)_z - \rho_l(z) b(z) (u_t - v_t), \quad \rho_l(z) v_{tt} = \rho_l(z) b(z) (u_t - v_t). \quad (1)$$

Здесь  $u$  и  $v$  – компоненты векторов скоростей смещений частиц упругого пористого тела и жидкости с парциальными плотностями  $\rho_s(z)$  и  $\rho_l(z)$  соответственно. Предположим, что пористая среда покоится при  $t < 0$ :  $u|_{t<0} = 0$ ,  $v|_{t<0} = 0$ . Пусть на границе  $z = 0$  приложена сила:  $\mu u_z|_{z=0} = \delta(t)$ , где  $\delta(t)$  – функция Дирака.

Используя методику предложенную в [3] для обратной задачи теории упругости, построены регуляризирующие алгоритмы следующих обратных задач:

**Задача 1.** Требуется по информации

$$u|_{z=0} = \phi(t), \quad (6)$$

восстановить  $\mu(z)$  из (1)-(5) (при этом считаются известными остальные функции  $\rho_s(z)$ ,  $\rho_l(z)$ ,  $b(z)$ ).

**Задача 2.** Требуется по информации (6) восстановить  $\chi(z)$  из (1)-(5) (при этом считаются известными остальные функции  $\rho_s(z)$ ,  $\rho_l(z)$ ,  $\mu(z)$ ).

**Задача 3.** Требуется по информации (6) восстановить  $\rho_s(z)$  из (1)-(5) (при этом считаются известными остальные функции  $\rho_l(z)$ ,  $\mu(z)$ ,  $b(z)$ ).

**Задача 4.** Требуется по информации (6) восстановить  $\rho_l(z)$  из (1)-(5) (при этом считаются известными остальные функции  $\rho_s(z)$ ,  $\mu(z)$ ,  $b(z)$ ).

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Доровский В.Н., Перепечко Ю.В., Роменский Е.И. Волновые процессы в насыщенных пористых упругодеформируемых средах // ФГВ. 1993. № 1. С. 100-111.
2. Blokhin A.M., Dorovsky V.N. Mathematical modelling in the theory of multivelocety continuum. N. Y.: Nova Science Publishers, Inc. 1995. 192 p.
3. Пестов Л.Н. Об одном способе регуляризации одномерной задачи теории упругости // Труды ВЦ СО РАН. Сер. Мат. модел. в геофизике. Новосибирск, 1993. 1. С. 112-124.

**3D-МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛН ЦУНАМИ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ  
ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТОЧНИКА ЦУНАМИ**Кабанихин С.И.<sup>1</sup>, Маринин И.В.<sup>1,2</sup>, Криворотко О.И.<sup>1</sup>,Зятков Н.Ю.<sup>1</sup>, Карас А.<sup>2</sup>, Хидашели Д.<sup>2</sup><sup>1</sup> *Институт вычислительной математики и**математической геофизики СО РАН, Новосибирск;*<sup>2</sup> *WARMERR (World Agency of Planetary Monitoring and Earthquake Risk  
Reduction), Женева, Швейцария**krivorotko.olya@mail.ru*

В докладе изложены результаты совместных разработок ИВМиМГ СО РАН, агентства Warmerr (Швейцария) и группы компаний Informar. Первый этап проекта “Трехмерные прямые и обратные задачи геофизики” завершился созданием программного комплекса (ITRIS), позволяющего проводить экспресс-обработку данных мониторинга, моделирование распространения и наката волн цунами на прибрежные районы. Программный комплекс позволяет оценивать степень риска возможных разрушений и других последствий цунами, землетрясений и различных природных и техногенных катастроф [1, 2]. На основе разработанного программного комплекса планируется создание технологии “no frost”, реализующей постоянный поток прямых и обратных задач: решение прямой задачи, визуализация и сопоставление с данными зондирования, решение обратной задачи (коррекция параметров модели). Подход к решению обратной задачи определения источника цунами основывается на недавних теоретических результатах решения задачи Дирихле для волнового уравнения [3], которая является некорректной. В докладе изложены численные методы решения задачи Дирихле, а также исследована степень некорректности задачи на основе сингулярного разложения.

Основная цель дальнейшей работы — создание автоматизированного рабочего места оперативного дежурного ЧС, максимально приближенного к реальной обстановке.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Marchuk A., Marinin I., Krivorotko O., Komarov V., Karas A., Khidasheli D.* 3D GIS Integrated Natural and Man-made Hazards Research and Information System // Proc. of The Joint Intern. Conf. on Human-Centered Computer Environments (HCCE) 2012, Aizu-Wakamatsu & Hamamatsu (Japan), March 8-13, 2012. P. 225-229.
2. *Kabanikhin Sergey, Karas Adel, Khidasheli David, Krivorotko Olga, Marinin Igor.* Ill-posed problems of tsunami and earthquakes lost estimations // Abs. of the 6th Intern. Conf. “Inverse Problems: Modeling and Simulation”, Antalya (Turkey) 21-26 May, 2012. P. 66-67.
3. *Kabanikhin S.I., Bektemesov M.A., Nurseitov D.B., Krivorotko O.I., Alimova A.N.* Optimization method in Dirichlet problem for wave equation // J. of inverse and ill-posed problems. 2012 (in print).

**АНАЛИЗ НЕКОРРЕКТНОСТИ И ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ  
РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ  
ФАРМАКОКИНЕТИКИ**

Кабанихин С.И., Нурсейтов Д.Б., Нурсейтова А.Т., Асманова Н.А.

*ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск, Россия,*

*ННЛКПИКТ КазНТУ им. К.И. Сатпаева, Алматы, Казахстан,*

*КазНПУ им. Абая, Алматы, Казахстан,*

*НЦ Противоинокционных препаратов, Алматы, Казахстан*

*e-mail: ksi52@mail.ru, ndb80@mail.ru, altynna@mail.ru, astanova@inbox.ru*

Рассматривается нелинейная обратная задача фармакокинетики для двухкамерной модели при внутрисосудистом введении препарата.  $C_1(t)$  – концентрация препарата в первой (центральной) камере,  $k_a$ ,  $k_{12}$ ,  $k_{21}$ ,  $k_{10}$  – константы скорости адсорбции, взаимоперехода между камерами 1 и 2 и элиминации из камеры 1 соответственно,  $C_0$  – начальная концентрация. В обратной задаче требуется определить константы  $k_a$ ,  $k_{12}$ ,  $k_{21}$ ,  $k_{10}$ ,  $C_0$  из соотношений

$$C_1(t) = A_1 e^{-\alpha t} + A_2 e^{-\beta t} - (A_1 + A_2) e^{-k_a t}, \quad (1)$$

$$A_1 = \frac{C_0 k_a (\alpha - k_{21})}{(\alpha - \beta)(k_a - \alpha)}, \quad A_2 = \frac{C_0 k_a (k_{21} - \beta)}{(\alpha - \beta)(k_a - \beta)}, \quad (2)$$

$$\alpha = \frac{k_{12} + k_{21} + k_{10} + \sqrt{(k_{12} + k_{21} + k_{10})^2 - 4k_{21}k_{10}}}{2}, \quad (3)$$

$$\beta = \frac{k_{12} + k_{21} + k_{10} - \sqrt{(k_{12} + k_{21} + k_{10})^2 - 4k_{21}k_{10}}}{2} \quad (4)$$

по дополнительной информации о концентрации в центральной камере в заданных моментах времени  $t_1, \dots, t_M$ :

$$C_1(t_j) = C_j, \quad j = \overline{1, M}. \quad (5)$$

Задача (1)–(5) является сильно некорректной. И, если проблема неустойчивости общеизвестна и ее решением более всего озабочены создатели программного обеспечения, то неединственность решения чаще всего связывают со свойствами препаратов, обладающих необычным сочетанием величин констант скорости адсорбции –  $k_a$  и элиминации –  $k_{10}$ , так называемый флип-флоп феномен, реализующийся при выполнении условия:  $k_{10} > k_a$ . Для описания этого феномена чаще всего привлекают так называемую однокамерную модель, изменение концентрации в которой со временем подчиняется уравнению

$$C(t) = \frac{C_0 k_a}{k_a - k_{10}} (e^{-k_{10} t} + e^{-k_a t}). \quad (6)$$

Имеются ссылки на то, что подобный феномен может быть реализован и в двухкамерных системах с неравномерным распределением препарата в организме.

С помощью метода моментов и преобразований Лапласа ранее было показано, что уравнения (6) и (1) имеют два и три решения соответственно. Реализация отдельных решений зависит от соотношений между величинами  $k_{10}$ ,  $k_a$  и  $k_a$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ . Предложенные схемы и условия позволяют перейти от одного решения к другому без дополнительных экспериментов и условий, но бездоказательный выбор одного из них, естественно, неприемлем.

Проблема неустойчивости исследуется с помощью сингулярного разложения. Для этого обратная задача (1)–(5) сводится к операторному виду

$$Aq = f, \quad (7)$$

где  $A$  – нелинейный оператор, затем линеаризацией задача (7) сводится к линейному операторному уравнению

$$A'(q)p = g, \quad \text{где } g = f - Aq. \quad (8)$$

Матрица Фреше  $A'(q)$  выписывается в явном виде. С помощью сингулярного разложения определяется такой набор  $t_1^{min}, t_2^{min}, \dots, t_M^{min}$  (временных точек измерения данных), для которого минимальное сингулярное число матрицы (8), а значит и ее число обусловленности, являются наименьшими по сравнению с другими рассмотренными наборами  $\{t_j\}_{j=1}^M$ . Тем не менее, даже в случае выбора  $\{t_j^{min}\}_{j=1}^M$  в качестве точек измерения нет гарантии, что полученное решение задачи (7) окажется устойчивым.

Приводятся результаты двух вычислительных экспериментов. В первом случае задается некоторое  $q$ , решается прямая задача и вычиляется  $f$  для различных разбиений временного интервала. Затем по полученным данным обратная задача решается

- методом итераций Ландвебера (МиЛ)  $q^{[n+1]} = q^{[n]} - \alpha[\mathcal{A}'(q^{[n]})]^*(\mathcal{A}(q^{[n]}) - f)$  для произвольного начального приближения;
- методом наименьших квадратов с использованием сингулярного разложения (МНК и СР) для начального приближения из окрестности точного решения;
- методом Ньютона (МН)  $q^{[n+1]} = q^{[n]} - [\mathcal{A}'(q^{[n]})]^{-1}(\mathcal{A}(q^{[n]}) - f)$  для начального приближения из окрестности точного решения.

Во втором случае по измеренным данным [2] для произвольного начального приближения решение обратной задачи восстанавливается

- методом наименьших квадратов с использованием сингулярного разложения (МНК и СР);
- методом Ньютона (МН)  $q^{[n+1]} = q^{[n]} - [\mathcal{A}'(q^{[n]})]^{-1}(\mathcal{A}(q^{[n]}) - f)$ ;
- методом наискорейшего спуска (МНС)  $q^{[n+1]} = q^{[n]} - \alpha_n[\mathcal{A}'(q^{[n]})]^*(\mathcal{A}(q^{[n]}) - f)$ .

## Список литературы

- [1] H. Boxenbaum, Pharmacokinetic tricks and traps: flip-flop models, Journal of Pharmacy and Pharmaceutical Sciences 1 (1998), no. 3, 90–91.
- [2] A. A. Prokopov, L.V. Shukil, A. C. Berlyand and I.V. Veselovskaya, Experimental study of pharmacokinetics of and phenoan acid and phenoan in rabbits, Chemical- Pharmaceutical Journal 40 (2006), no. 1, 6–8.
- [3] T. Zornoza, M. Cano-Cebrian, L. Hipolito et al., Evidence of flip-flop phenomenon in acamprosate pharmacokinetics: an *in vivo* study in rats, Biopharm. Drug Dispos (2006), no. 27, 305–311.
- [4] J. Gabrielson, D. Weiner, Pharmacokinetic and Pharmacodynamic Data Analysis: concepts and Applications 4th edition, Sweden: Kristianstads Boktryckeri AB (2006).
- [5] M. Gibaldi, D. Perrier, Pharmacokinetics, 2nd edition revised and expanded, USA NY: Informa Healthcare (2007).
- [6] E. Liang, H. Derendorf, Pitfalls in pharmacokinetic multicompartment analysis, Journal of Pharmacokinetics and Biopharmaceutics 26 (1998), no. 2, 247–260.
- [7] B. A. Urmashv, N. Asmanova and J. Ualiev, Method of statistical moments and Laplace transformation in solving some ill-posed problems of formal kinetics (in Russian), in: Proceedings of the International Conference “Central Asia Ecoanalitik”, Kazakh National University after Al-Farabi, Almaty (2007), 349–356.
- [8] L. Shargel, S. YU A. Wu-Pong, Applied Biopharmaceutics & Pharmacokinetics, USA: McGraw-Hill (2005).

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГЕОТЕРМИКИ

Карчевский А.Л., Дучков А.А.

*Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск  
Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А.Трофимука СО РАН  
karchevs@math.nsc.ru, DuchkovAA@ipgg.nsc.ru*

Глубинный тепловой поток, идущий из недр Земли, является важным индикатором, характеризующим геодинамическую активность исследуемого региона. Большая величина теплового потока типична для активных регионов (рифтовые зоны, вулканы и прочее), и наоборот, низкий уровень теплового потока соответствует устойчивым платформам.

Оценка теплового потока по приповерхностным температурным измерениям является важнейшей задачей геотермики. Для ее решения вдонные осадки Телецкого озера был внедрен зонд, на котором с шагом 35 см располагались четыре термодатчика. Измерения температуры велись в течение 2,5 лет. По этим данным необходимо оценить величину теплового потока.

Кондуктивный теплоперенос описывается одномерным уравнением теплопроводности (предполагаем горизонтально-слоистую структуру осадков):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho C} \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (1)$$

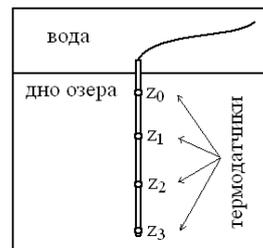
где  $T$  – температура,  $t$  – время,  $z$  – глубина,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $\rho C$  – удельная теплоемкость. Далее будем предполагать, что с глубиной изменяется только  $\lambda(z)$ , а  $\rho C$  остается постоянной. Тогда запишем краевую задачу:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad T(0, t) = T_0(t), \quad \frac{\partial T}{\partial z}(Z, t) = G. \quad (2)$$

где  $k(z) = \lambda(z)/(\rho C)$  – коэффициент температуропроводности,  $T_0(t)$  – сезонные колебания поверхностной температуры,  $G$  – температурный градиент на большой глубине  $Z$ , который связан с глубинным тепловым потоком  $Q = \lambda(Z)G$ .

Обратная задача состоит в отыскании температуропроводности  $k(z)$  и градиента  $G$  по известным измерениям температуры  $T(z_i, t)$  ( $i = \overline{0, 3}$ ) на четырех глубинах в осадках ( $z_0 = 0$ ,  $z_1 = 0.35$ ,  $z_2 = 0.7$ ,  $z_3 = 1.05$ ) и значению  $\rho C$ .

Данная обратная задача будет решаться в частотной области, т.е. после применения разложение в ряд Фурье по временной переменной  $t$  приходим к следующей постановке:



$$\frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + i\omega_j T = 0, \quad j = \overline{0, N_\omega} \quad (3)$$

$$T(0; \omega_j) = T_0(\omega_j), \quad j = \overline{0, N_\omega} \quad (4)$$

$$T(z_1; \omega_j) = T_1(\omega_j), \quad j = \overline{0, N_\omega} \quad (5)$$

$$T(z_2; \omega_j) = T_2(\omega_j), \quad j = \overline{0, N_\omega} \quad (6)$$

$$T(z_3; \omega_j) = T_3(\omega_j), \quad j = \overline{0, N_\omega} \quad (7)$$

$$T(z_G; 0) = G \text{ и } T(z_G; \omega_j) = 0, \quad j = \overline{1, N_\omega}. \quad (8)$$

Поскольку функция  $k$  является кусочно-постоянной, необходимо к (3)-(7) добавить условия непрерывности температуры и теплового потока, которое для постоянного  $\rho C$  принимает вид:

$$[T]_{\xi_n} = 0, \quad \left[ k \frac{\partial T}{\partial z} \right]_{\xi_n} = 0, \quad n = \overline{1, N-1}, \quad (9)$$

где точки  $\xi_n$  — точки разрыва среды,  $\xi_0 = z_0$ ,  $\xi_{n_1} = z_1$ ,  $\xi_{n_2} = z_2$ ,  $\xi_N = z_3$ .

Был предложен следующий путь решения задачи:

— имеем постановку прямой задачи (3), (4), (7), (9) на интервале  $[z_0, z_3]$ , соотношения (5), (6) будем считать дополнительной информацией о решении данной прямой задачи;

— на интервале  $z \in [z_0, z_3]$  решаем обратную задачу (3)-(7), (9) по поиску неизвестной кусочно-постоянной функции  $k(z)$ ;

— используя известную функцию  $k$ , решаем прямую задачу (3), (4), (7), (9) и определяем

$$(k T_z)|_{z=z_3} = P(\omega_j), \quad j = \overline{0, N_\omega}; \quad (10)$$

— имеем постановку прямой задачи (3), (7)-(9) на интервале  $[z_3, z_G]$ , соотношение (10) считаем дополнительной информацией о решении данной прямой задачи;

— на интервале  $[z_3, z_G]$  решаем обратную задачу (3), (7)-(10) по поиску неизвестной кусочно-постоянной функции  $k(z)$  и постоянной  $G$ .

Прямые задачи решались методом послойного пересчёта, т. е. получены аналитические выражения для решений данных задач. Обратные задачи решались при помощи минимизации соответствующих функционалов невязки. Минимизация осуществлялась при помощи метода сопряжённых градиентов, получены аналитические выражения для градиентов данных функционалов. Решение задачи тестировалось на синтетических данных, а затем было апробировано на реальных данных, полученных на Телецком озере.

Работа авторов была поддержана интеграционным грантом СО РАН № 14, интеграционным грантом СО РАН № 45, грантом РФФИ № 12-01-00773.

**ПРОЕКТИРОВАНИЕ НА ПРОСТРАНСТВО  
ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ**

Кобрунов А.И.

*Ухтинский государственный технический университет, Ухта*  
*akobrunov@ugtu.net*

К обратным задачам гравиметрии

Пусть задана ограниченная область  $V$  в трехмерном Евклидовом пространстве  $R^3$  и функция  $f(x, y, z)$ , принадлежащая  $L_2(V)$ . В пространстве  $L_2(V)$  определено подпространство  $H(V)$  гармонических в  $V$  функций.

**Задача:** найти проекцию  $\xi(x, y, z)$  функции  $f(x, y, z)$  на  $H(V)$ .

**Утверждение.** Пусть  $S$  – охватывающая  $V$  поверхность: каждая точка  $\partial V$  лежит внутри  $S$  и

$$u(s) = \int_V \frac{f(v)}{|v-s|} dv. \quad (1)$$

$$|v-s| = \left[ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \right]^{1/2};$$

$$\{x, y, z\} = v \in V; \{x_0, y_0, z_0\} = s \in S.$$

Тогда  $\xi(x, y, z)$  есть нормальное в  $L_2(V)$  решение уравнения (1) относительно  $f(v)$ :  $\|\xi(x, y, z)\|_{L_2} = \min_{f(v): A[f(v)] = u(s)} \|f(v)\|_{L_2}$ .

**Следствие.** Для любой ограниченной области  $V$  и вертикальной производной гравитационного потенциала  $u(s)$  заданного вне  $V$ , решения обратной задачи гравиметрии (по заданному  $u(s)$  относительно  $f(v)$ ) минимально уклоняющегося от заданного нулевого приближения  $f_0(v)$  в квадратичной метрике, сводится к добавлению к нулевому приближению гармонической функции.

Обратная задача для уравнения (обратная структурная задача гравиметрии):

$$u(s) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \frac{\sigma_i d\omega}{|v-s|}; \quad \omega \in V \quad (2)$$

где  $\Omega_i$  – непересекающиеся и полностью секущие область  $V$  поверхности, состоит в нахождении поверхностей  $\Omega_i$  по заданным  $u(s)$  и  $\sigma_i, i = 1 \div N$ .

**Утверждение.** Если нормальное в  $L_2^N$  решение уравнения (2) существует, то найдется гармоническая в  $V$  функция  $g(x, y, z)$ , такая что уравнения поверхностей  $z = f_i(x, y), i = 1 \div N$  как функции координат с точностью до множителя  $\sigma_i$  равны значениям единой для всей системы гармонической функции  $g(x, y, z)$  на самой этой поверхности:  $f_i(x, y) = \sigma_i g(x, y, f(x, y))$ .

**СРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ И ЭКСПЕРИМЕНТА В ЗАДАЧЕ  
О ВОЛНОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ, ВОЗНИКАЮЩИХ  
ПРИ РАЗРУШЕНИИ ПЛОТИНЫ НА СКАЧКЕ  
ПЛОЩАДИ СЕЧЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО КАНАЛА**

Ковыркина О.А., Плетнев А.С.<sup>1</sup>

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева, Новосибирск  
olyana@ngs.ru*

<sup>1</sup>*Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет  
(Сибстрин), Новосибирск  
pletnewalexius@mail.ru*

Рассматривается задача о течениях, возникающих при разрушении плотины на скачке площади сечения прямоугольного канала. Теоретически эта задача моделируется на основе первого приближения теории “мелкой воды” [1-3]. Для одномерного случая построены точные автомодельные решения этой задачи, в которых потери полной энергии потока на скачке площади сечения учитываются путем введения эвристического параметра. В двумерном случае проведено численное моделирование этой задачи на основе консервативной разностной схемы сквозного счёта. Построенные таким образом решения получили хорошее согласование с результатами лабораторных экспериментов по возможным типам волн, скорости их распространения и асимптотическим глубинам за их фронтами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Интеграционных проектов СО РАН № 117, 132 и проекта фундаментальных исследований Президиума РАН № 4.8.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стокер Дж. Дж.* Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
2. *Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
3. *Остапенко В. В.* Гиперболические системы законов сохранения и их приложение к теории мелкой воды. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2004.

## ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ МИКРОЧАСТИЦ КРОВИ ПО ИНДИКАТРИСЕ СВЕТОРАССЕЯНИЯ МЕТОДОМ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Конохова А.И., Юркин М.А., Москаленский А.Е., Мальцев В.П.  
Институт химической кинетики и горения СО РАН, Новосибирск  
Новосибирский государственный университет, Новосибирск  
konokhova\_a@mail.ru

В настоящее время широко распространенными оптическими методами изучения крови являются методы, основанные на светорассеянии. В частности, проточная цитометрия позволяет с высокой скоростью измерять сигналы светорассеяния от одиночных объектов и обеспечивает быстрый анализ всей популяции частиц.

Микрочастицы крови – мембранные везикулы, которые образуются клетками крови под воздействием различных факторов, нарушающих их нормальное функционирование. Они участвуют в множестве физиологических процессов и являются маркерами различных патологий, из-за чего представляют интерес для научных и клинических исследований.

Сканирующий проточный цитометр (СПЦ) [1] позволяет измерять индикатрисы светорассеяния одиночных частиц  $I(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (S_{11}(\theta, \varphi) + S_{14}(\theta, \varphi)) d\varphi$ , где  $S$  – матрица Мюллера,  $\theta$  и  $\varphi$  полярный и азимутальный углы светорассеяния,  $\theta \in [10^\circ, 60^\circ]$ .

В качестве оптической модели микрочастиц использовался шар, характеризующийся двумя параметрами: диаметром  $a$  и показателем преломления  $n$  ( $a \in [0.1, 1.5]$  мкм,  $n \in [1.34, 2.5]$ ). Обратная задача светорассеяния решалась методом глобальной оптимизации DiRect для минимизации взвешенной суммы квадратов отклонений экспериментальной индикатрисы светорассеяния от теоретической, рассчитанной по теории Ми. Оценка погрешности определения параметров была осуществлена с помощью Байесовского подхода, используя информацию о поверхности взвешенной суммы квадратов, полученной в ходе работы DiRect.

Описанные методы были апробованы на пробе крови. По результатам характеристики с помощью метода деконволюции были построены распределения по размерам и показателям преломления микрочастиц, хорошо согласующиеся с литературными данными.

Подробнее с результатами данной работы можно ознакомиться в [2].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. P. Maltsev. Scanning flow cytometry for individual particle analysis // Rev. Sci. Instrum. 71, 2000, PP. 243–255.
2. A.I. Konokhova, M.A. Yurkin, A.E. Moskalensky, A.V. Chernyshev, G.A. Tsvetovskaya, E.D. Chikova, and V.P. Maltsev. Light-scattering flow cytometry for identification and characterization of blood microparticles // accepted to J. Biomed. Opt.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИГНАЛА И КОЭФФИЦИЕНТОВ ОТРАЖЕНИЯ  
В СВЁРТОЧНОЙ МОДЕЛИ АДАПТИВНЫМ МЕТОДОМ**

Косьянов А.Н.

*Сибирский федеральный университет, Красноярск**temnaya-armada@yandex.ru*

Чтобы получить представления о свойствах объекта, необходимо создать его модель с некоторыми параметрами. Зная эти параметры модели и используя математические зависимости между моделью и измеряемыми параметрами поля, можно вычислить теоретические значения поля для заданных условий наблюдения. Процесс перехода от модели к полю называют решением прямой задачи. Переход от значения поля к параметрам модели среды — решением обратной задачи. Для оценки сигнала и коэффициентов отражения используем свёрточную модель. Задача решается во временной области, поэтому при заданном шаге дискретизации вектора сигнала  $S$ , трассы  $\mathbf{U}$  и коэффициентов отражения  $H$  получаем следующую систему уравнений:  $U_i = \sum_j^n S_j H_{(i-j)}$  при  $n \ll m$ ,  $n \leq i \leq m - n$ ; вектор  $\mathbf{U}$  — сейсмическая трасса, полученная в процессе наблюдения и дальнейшей обработки. Вследствие этого  $\tilde{U}_i = U_i + \xi_i$ , где  $\xi_i$  — помеха.

Используя такую модель, предполагая некоторое аналитическое выражение для сигнала и зная коэффициенты отражения по данным акустических наблюдений в глубоких скважинах, можно рассчитать модельную трассу (синтетическую, так часто называют её сейсморазведчики). Сопоставляя её с реально, делаются выводы об адекватности предположений. Результаты многочисленных вариаций вида сигнала позволяют выбрать такой, который даёт модельную трассу похожую на реальную. Эта процедура подбора сигнала даёт возможность отождествить (увязать) данные геофизического исследования скважин с сейсмическими данными. Но используя уравнения и имея известные  $U_i$  по сейсмическим данным и  $H_i$  по акустическим данным, решая систему уравнений, можно получить оценку вектора  $S_i$  на наиболее выраженных участках опорных отражений задачу удаётся решать, если импульсная трасса, определённая по акустическим данным, не искажена сильными помехами. Если использовать не одну трассу, а несколько ближайших к скважине, то в результате получим несколько сигналов, а из них выберем наилучший по определённым критериям. Зная вектор  $\mathbf{S}$ , используя систему уравнений, можно оценивать коэффициенты отражения на всей совокупности трасс. Так как векторы  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{S}$  искажены помехами, то задачи являются существенно некорректными. Потому для решения обратных задач используется адаптивный метод [1]. В докладе приводятся результаты модельных и реальных исследований.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кочнев В.А. Адаптивные методы интерпритации сейсмических данных. Новосибирск: Наука, 1998. 152 с.

## ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ДВОЙСТВЕННАЯ ИТЕРАТИВНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ТЕОРЕМЫ КУНА – ТАККЕРА

Ф.А. Кутерин, М.И. Сумин

*Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород*  
*xredor@gmail.com*

В докладе рассматривается параметрическая задача минимизации

$$\begin{aligned} f(z) \rightarrow \min, \quad Az = h + p, \quad g_i(z) \leq r_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad z \in \mathcal{D} \subset Z, \\ p \in H, \quad r = (r_1, \dots, r_m)^* \in \mathbf{R}^m \text{ — параметры,} \end{aligned} \quad (1)$$

где  $f : \mathcal{D} \rightarrow R^1$  — непрерывный сильно выпуклый функционал,  $A : Z \rightarrow H$  — линейный ограниченный оператор,  $g_i : \mathcal{D} \rightarrow R^1$ ,  $i = 1, \dots, m$ , — непрерывные выпуклые функционалы,  $g(z) \equiv (g_1(z), \dots, g_m(z))^*$ ,  $\mathcal{D}$  — выпуклое замкнутое ограниченное множество,  $Z, H$  — гильбертовы пространства.

Хорошо известная классическая теорема Куна – Таккера для задачи выпуклого программирования (1) обладает двумя характерными особенностями. Во-первых, она не может быть применена в отсутствие свойств регулярности задачи (существование вектора Куна – Таккера), а во-вторых, она “неустойчива” по отношению к возмущениям исходных данных (подробности см. в [1]). В [1] была предложена регуляризованная секвенциальная версия теоремы Куна – Таккера, непосредственно обобщающая классический вариант теоремы в форме двойственности, и отличающаяся от него двумя важными обстоятельствами: 1) она справедлива без каких-либо предположений регулярности оптимизационной задачи (1); 2) она “устойчива” по отношению к ошибкам ее исходных данных.

Настоящий доклад посвящен обсуждению другого варианта регуляризованной секвенциальной теоремы Куна – Таккера, утверждение которого также справедливо без каких-либо предположений регулярности задачи (1) и представляет собою по форме устойчивую по отношению к ошибкам исходных данных итерационную процедуру, приспособленную непосредственно для практического решения оптимизационных задач вида (1). Эта итерационная процедура представляет собою регуляризирующий алгоритм и основана на методе итеративной двойственной регуляризации [2]. Она снабжается соответствующим регуляризирующим правилом останова итерационного процесса.

В докладе обсуждаются возможные приложения предлагаемого регуляризованного варианта теоремы Куна – Таккера и, в частности, рассматриваются конкретные иллюстративные примеры, связанные с решением обратной задачи финального наблюдения для одномерного уравнения теплопроводности.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сумин М.И.* Регуляризованная параметрическая теорема Куна-Таккера // Журн. вычисл. матем. и матем. физ., Т. 51, №. 9, 2011, с. 1594-1615.
2. *Сумин М.И.* Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47, №. 4. С. 602-625.

**ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД УСВОЕНИЯ ДАННЫХ В МОДЕЛИ  
КОНВЕКЦИИ – ДИФФУЗИИ ТЕПЛА В АТМОСФЕРЕ**

Кутненко А.Н.

*Институт вычислительной математики  
и математической геофизики СО РАН, Новосибирск  
ank96@yandex.ru*

В работе рассматривается алгоритм восстановления вертикального распределения температуры в пограничном слое атмосферы, позволяющий в режиме реального времени прогнозировать поведение функции состояния, а также корректировать прогноз в зависимости от поступающей информации контактных измерений температуры с оценкой величин неопределенностей модели и данных измерений. Использование системы усвоения на базе численной модели процессов конвекции – турбулентной диффузии обеспечивает восстановление функции состояния модели с заданным пространственно-временным разрешением.

Метод базируется на вариационных принципах в сочетании с методами расщепления и теории чувствительности, комбинации прямого и обратного моделирования [1]. Проводится сравнительный анализ эффективности применения дискретно-аналитической и конечно-разностной численных схем в реализованном вариационном алгоритме последовательного усвоения данных. Дискретно-аналитический подход благодаря использованию аналитических решений локально-сопряженных задач дает точные по пространству численные схемы, тем самым уменьшает неопределенности численного алгоритма, обусловленные ошибками аппроксимации.

Работа поддержана Программой фундаментальных исследований № 3 ОМН РАН и проектом РФФИ 11-01-00187.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пененко В.В. Вариационные методы усвоения данных и обратные задачи для изучения атмосферы, океана и окружающей среды // СибЖВМ. 2009. Т. 12. С. 421-434.

## О ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ НЕРАССЕИВАЮЩИХ ОБОЛОЧЕК ДЛЯ УРАВНЕНИЙ АНИЗОТРОПНОЙ АКУСТИКИ

Лобанов А.В.

*Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток*

*alekslobanov1@mail.ru*

Данная работа основана на [1], где исследуется вопрос о существовании анизотропных оболочек, являющихся нерассеивающими для падающих волн, создаваемых внешними компактно расположенными точечными или объемными источниками. Авторы [1] приводят конструктивное доказательство существования класса такого типа оболочек, имеющих форму сферического слоя  $\Omega = \{x = (r, \theta, \varphi) : a < r < b\}$ . Основные результаты [1] получены для модели анизотропной акустики, описываемой следующими уравнениями

$$\nabla p = i\omega\rho_0\tilde{\rho}(x)\nu + \rho_0\tilde{\rho}F, \quad i\omega p = \lambda_0\lambda(x)\operatorname{div}\nu. \quad (1)$$

Здесь  $p$  — звуковое давление,  $\nu$  — вектор колебательной скорости частиц жидкой среды,  $\lambda(x)$  — переменный коэффициент сжимаемости,  $\tilde{\rho}(x)$  — переменный тензор плотностей анизотропной среды,  $\rho_0 = \text{const}$  и  $\lambda_0 = \text{const}$  — характерные значения плотности однородной среды и коэффициента сжимаемости,  $\omega$  — круговая частота,  $i$  — мнимая единица,  $F$  — вектор плотности объемных источников звука. В частном случае, когда  $\lambda(x) = 1$ ,  $\tilde{\rho}(x) = I$ , где  $I$  — единичный тензор, уравнения (1) представляют собой классическую модель линейной акустики в однородной изотропной среде. Приводятся явные формулы, выражающие основные параметры указанной оболочки через произвольную функцию одной переменной

$$g \in C^1[a, b] \cap C^2(a, b),$$

где  $a$  и  $b$  — внутренний и внешний радиусы сферического слоя. Подчеркнем, что все параметры каждой такой оболочки описываются ограниченными и непрерывными функциями, а их гладкость целиком определяется гладкостью функции  $g$ .

В настоящей работе сформулирована обратная экстремальная задача для рассматриваемых уравнений анизотропной акустики, исследование её разрешимости, на основе методов книги [2] разработан численный алгоритм её решения и проведены вычислительные эксперименты.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты № 10-01-00219-а, 11-01-98508-р\_восток\_а).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев Г.В., Романов В.Г. Об одном классе нерассеивающих акустических оболочек для модели анизотропной акустики // Сибирский журн. индустр. матем. 2011. Т. 14, № 2. С. 15-20.
2. Алексеев Г.В. Метод нормальных волн в подводной акустике. Владивосток. 2006. 362с .

## ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ – ДИФФУЗИИ – РЕАКЦИИ

Луценко А.В.

*Дальневосточный федеральный университет, Владивосток  
lutsenochka@gmail.com*

Целью данной работы является теоретический анализ коэффициентной обратной задачи для стационарного уравнения конвекции – диффузии – реакции, рассматриваемого в области  $\Omega$  из пространства  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$  с липшицевой границей  $\Gamma$ , состоящей из двух частей  $\Gamma_D$  и  $\Gamma_N$  [1]:

$$-\lambda \Delta \varphi + \mathbf{u} \cdot \text{grad} \varphi + k\varphi = f \text{ в } \Omega, \quad \varphi = \psi \text{ на } \Gamma_D, \quad \lambda(\partial \varphi / \partial n + \alpha \varphi) = \chi \text{ на } \Gamma_N. \quad (1)$$

Здесь  $\varphi$  – концентрация загрязняющего вещества (примеси),  $\lambda = \text{const} > 0$  – коэффициент диффузии,  $\mathbf{u}$  – вектор скорости,  $k \geq 0$  – величина, характеризующая скорость распада загрязняющего вещества за счет химических реакций,  $f$  – плотность объемных источников,  $\psi$  и  $\chi$ ,  $\alpha$  – некоторые функции. В этой работе рассматривается случай, когда неизвестны функции  $\mathbf{u}$  и  $f$ , и их требуется определить вместе с решением  $\varphi$  по дополнительной информации о решении  $\varphi$ . Для решения соответствующей обратной задачи применим оптимизационный метод [1–3], в соответствии с которым указанная задача сводится к решению соответствующей задачи управления. Численный алгоритм решения задачи (1) основывается на дискретизации ее методом конечных элементов с использованием свободно распространяемого пакета программ FreeFem++. Для решения экстремальной задачи используется метод Ньютона. В работе были проведены вычислительные эксперименты, позволившие выявить влияние различных параметров и выбора начального приближения на качество восстановления параметров  $\mathbf{u}$  и  $f$ . Исследована зависимость качества восстановления параметров  $\mathbf{u}$  и  $f$  от шага сетки. Рассмотрена зависимость между величиной площади области измерений и выбором места ее расположения и качеством восстановления параметра. Кроме того, выполнено сравнение результатов численных экспериментов, полученных с помощью указанного пакета.

Работа проводилась при частичной поддержке гранта ДВФУ “Методы управления горением, теплообменом и массопереносом в технологических процессах и природных средах”.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев Г.В., Терешко Д.А.* Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008. 365 с.
2. *Алексеев Г.В.* Единственность и устойчивость в коэффициентных обратных экстремальных задачах для стационарной модели массопереноса // Докл. АН. 2007. Т. 416., № 6. С. 3–16.
3. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СРЕДЫ С ЛИНЕЙНОЙ  
ВДОЛЬ ВЫДЕЛЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ СКОРОСТЬЮ  
ПО КИНЕМАТИЧЕСКИМ ДАННЫМ**

Мальцева С.В.

*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск  
svetlana.v.maltseva@gmail.com*

В работе рассматривается трехмерная модель среды, в которой скорость распространения сигнала линейно возрастает с глубиной,  $v = az + b$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ . Рассматриваемая среда задается описывается римановой метрикой  $ds^2 = \frac{1}{(az + b)^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ , геодезическими которой являются дуги окружностей [1].

Нормаль к поверхности среды отклоняется на небольшой угол от оси  $Oz$ . На поверхности среды рассматривается площадная система наблюдений и вычисляются времена пробега сигнала  $\tau$  между каждым датчиком и каждым приемником. Далее с помощью функционала  $F(\tau) = \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_2}\right)^2$  [2] устанавливается направление, в котором среда является горизонтально однородной. Затем по кинематическим данным, вычисленным в найденном направлении, итерационно находятся параметры среды  $a$  и  $b$ .

Проведено численное исследование влияния выбора начальных данных и внешнего шума на сходимость итерационного процесса и количество итераций.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект № 11-07-00447).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики, том четвертый, часть первая // Москва: Наука, 1974.
2. *Аниконов Ю.Е., Пестов Л.Н.* Формулы в линейных и нелинейных задачах томографии // Новосибирск, 1996.

**О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЗАДАЧИ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ  
С НЕЗНАКООПРЕДЕЛЕННОЙ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ**

Марков В.Г.

*Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск  
bntr@rambler.ru*

Рассматриваются дифференциальные операторы вида  $Lu = \frac{1}{g(x)}L_0u, x \in (a, b)$ , где  $L_0$  – обыкновенный дифференциальный оператор порядка  $2m$ , вещественная функция  $g(x)$  меняет знак на интервале  $(a, b)$  [1]. Рассматривается случай, когда оператор  $L$  равномерно  $J$ -диссипативен в пространстве Крейна  $F_0 = L_{2,g}(a, b)$  и область определения оператора  $L$  содержит, вообще говоря, разрывные функции, удовлетворяющие общим условиям склейки в точках взаимодействия.

Доказано, что почти во всех случаях вопросы существования максимальных инвариантных подпространств не зависят от вида граничных условий.

В случае существования этих подпространств оператор допускает разложение на сумму коммутирующих операторов, определенных в соответствующих подпространствах, при определенных условиях эти операторы с точностью до умножения на  $-1$  – генераторы аналитических полугрупп. Последний факт позволяет исследовать самые разные вопросы, связанные с разрешимостью уравнений, куда этот оператор входит.

Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования и науки РФ № 02.740.11.0609.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Егоров И.Е., Пятков С.Г., Попов С.В. Неклассические операторно-дифференциальные уравнения // Новосибирск: Наука, 2000.

**РЕШЕНИЕ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ,  
СВЯЗАННЫХ С ЦУНАМИ**

Марчук Ан.Г.

*Институт вычислительной математики  
и математической геофизики СО РАН, Новосибирск  
tag@omzg.sccc.ru*

Основной задачей служб предупреждения цунами является прогноз высоты волны цунами в различных пунктах зоны ответственности, желательно до прихода туда самой волны. Зная местоположение и величину вертикального смещения волной поверхности в очаге, нетрудно с помощью численных расчётов оценить высоту цунами в любой точке расчётной области. Однако, используя только сейсмические измерения, не удаётся достаточно быстро и точно определять параметры очага цунами. Более достоверная информация об этом может быть получена путём измерения уровня океана в различных точках акватории. Разработаны методы определения очертаний очаговой зоны (области начального вертикального смещения волной поверхности) по временам прихода образовавшейся волны цунами в регистраторы. По записям уровня океана можно также определить расположение центра очага и оценить его размеры. Такая оценка может быть проделана в течение минут после регистрации волны хотя бы одним датчиком, что может быть полезно, хотя бы для участков побережья, расположенных далее по побережью, от проекции очага. В докладе представлены кинематические методы исследования цунами, позволяющие к тому же делать оценки амплитуд волн. С помощью такого рода алгоритмов можно восстанавливать донный рельеф по временам вступления цунами в точки установки датчиков (при достаточно развитой сети наблюдения).

Работа поддержана госконтрактами № 14.740.11.0350 и № 16.740.11.0057.

## ГРУППЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ, ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ДРУГИЕ ФОРМУЛЫ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Меграбов А.Г.

*Институт вычислительной математики и математической геофизики  
СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090, Россия  
tag@sscc.ru*

Представлен обзор исследований автора за 2007–2012 гг. по векторному анализу, дифференциальной геометрии и дифференциальным уравнениям (ДУ) математической физики на основе групп эквивалентности. Они развивают предложенный ранее подход к ДУ, где решение ДУ и его параметры (например, коэффициенты) рассматриваются как равноправные переменные. В групповом анализе ДУ адекватной этому подходу является группа эквивалентности. Ее преобразованиям подвергаются как решение ДУ, так и его параметры. Подход основан на определении, систематическом изучении и применении дифференциальных инвариантов (ДИ) группы эквивалентности данного ДУ.

Исходным пунктом для этого цикла явилось тождество

$$\operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{v}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}(\mathbf{v}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{T}(\mathbf{v}) = (\mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v})/|\mathbf{v}|^2 - \operatorname{grad} \ln |\mathbf{v}|$ , для произвольного гладкого векторного поля  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y) = |\mathbf{v}| \boldsymbol{\tau}$ . Оно получено [1] для  $\mathbf{v} = \operatorname{grad} u(x, y)$  при преобразовании к векторному виду равносильного выражения для гауссовой кривизны  $K(x, y)$  поверхности с конформно евклидовой метрикой  $dl^2 = n^2(x, y)(dx^2 + dy^2)$  через другие ДИ группы Ли  $G$ . Группа  $G$  найдена как группа эквивалентности уравнения эйконала  $\tau_x^2 + \tau_y^2 = n^2(x, y)$  и других ДУ и расширение группы конформных преобразований  $x, y$  на пространство  $x, y, t, u^1 = \tau, u^2 = n^2$ . Поиск поля  $\mathbf{A}$  и более “первичной”, чем (1), формулы и дальнейшие исследования привели к следующим результатам.

1. *В векторном анализе.* Найден ряд неклассических формул в виде векторных и скалярных дифференциальных тождеств, связывающих и разделяющих модуль  $|\mathbf{v}|$  и направление  $\boldsymbol{\tau}$  ( $|\boldsymbol{\tau}| \equiv 1$ ) произвольного гладкого векторного поля  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z) = |\mathbf{v}| \boldsymbol{\tau}$ . Среди них есть основное вида  $\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{S}(\boldsymbol{\tau})$ , где  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\tau} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}$ , из которого следуют другие, в том числе (1).

2. *В дифференциальной геометрии.* При поиске вектора  $\mathbf{A}$  и геометрического смысла вектора  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau})$  найдено, что в плоском случае  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}) = -\mathbf{S}^* = \operatorname{rot}(\alpha \mathbf{k})$  (т. е.  $\mathbf{A} = \alpha \mathbf{k}$ ), где  $\mathbf{S}^* = \mathbf{K}_\tau + \mathbf{K}_\nu$ ,  $\mathbf{K}_\tau$  и  $\mathbf{K}_\nu$  — векторы кривизны плоских кривых  $L_\tau$  с ортами Френе  $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}$  (касательной и нормали) и ортогональных к ним кривых  $L_\nu$ ,  $\alpha$  — угол наклона  $\boldsymbol{\tau}$  к оси  $x$ ,  $\mathbf{k}$  — орт по оси  $z$ . Найденное тождество [2]

$$\operatorname{div} \mathbf{S}^* = 0 \quad (2)$$

означает закон сохранения в дифференциальной геометрии кривых. В трехмерном случае найдены законы сохранения  $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ , где  $\mathbf{F}$  выражается через орты

Френе  $\tau$ ,  $\nu$ ,  $\beta$  (касательной, главной нормали и бинормали) кривых  $L_\tau$ , их кривизну  $k$  и кручение  $\varkappa$  как функции  $x, y, z$ . В плоском случае они переходят в (2).

Найдено дивергентное представление гауссовой кривизны  $K(x, y)$  поверхности, заданной графиком  $z = u(x, y)$ :  $K(x, y) = \operatorname{div} \mathbf{V}_1$ ,  $\mathbf{V}_1 = |\operatorname{grad} u|^2 \mathbf{T}(\operatorname{grad} u) / (1 + |\operatorname{grad} u|^2)$ . Это дает связь между свойствами гауссовой кривизны  $K(x, y)$  и поля  $\mathbf{V}_1$ . Получена формула для полной (интегральной) кривизны поверхности с метрикой  $dl^2 = n^2(x, y)(dx^2 + dy^2)$ , отличная от классической и др. [3].

3. *По ДУ математической физики.* Даны приложения формул п. 1 и 2 к классическим ДУ. Роль кривых  $L_\tau$  при этом играют векторные линии рассматриваемого векторного физического поля  $\mathbf{v}$ . Открыты законы сохранения для поля времен  $\tau$  (решений  $\tau$  уравнения эйконала  $|\operatorname{grad} \tau|^2 = n^2$ ,  $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \tau$ ) в кинематической сейсмике (геометрической оптике). В плоском случае это  $\operatorname{div} \mathbf{T}(\operatorname{grad} \tau) = 0$  с заменой  $|\operatorname{grad} \tau| = n(x, y)$  [4]; геометрический смысл: сумма  $\mathbf{S}^*$  векторов кривизны лучей и фронтов является соленоидальным полем, т. е.  $\operatorname{div} \mathbf{S}^* = 0$ . Отсюда  $\Delta \ln n = \operatorname{div} (\Delta \tau \operatorname{grad} \tau / n^2)$  и можно найти интегральные характеристики среды в обратных задачах. Найдены новые законы сохранения для решений гидродинамических уравнений Эйлера [5] и Максвелла. Обнаружена связь между уравнением Монжа — Ампера  $u_x^2 - u_{xx}u_{yy} = f$  и уравнением для функции тока плоского движения идеальной несжимаемой жидкости [3, 5] и др.

4. *По групповому анализу.* Найдена и исследована 10-параметрическая группа Ли преобразований 6-мерного пространства, являющаяся расширением группы конформных преобразований 3-мерного пространства, а также группой эквивалентности 3-мерного уравнения эйконала и других классических ДУ математической физики. Найдены в явном виде ее ДИ. Получена явная формула, выражающая скалярную кривизну  $R(x, y, z)$  трехмерного конформно-евклидова риманова пространства через ДИ этой группы. (Величина  $R$  является аналогом гауссовой кривизны  $K(x, y)$  двумерного случая).

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 12-01-00648).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Меграбов А.Г. Об одном дифференциальном тождестве // ДАН. 2004. Т. 395, № 2. С. 174–177.
2. Меграбов А.Г. Дивергентные формулы (законы сохранения) в дифференциальной геометрии плоских кривых и их приложения // ДАН. 2011. Т. 441, № 3. С. 313–317.
3. Меграбов А.Г. Дифференциальные тождества, связывающие лапласиан скалярной функции, модуль ее градиента и угол его направления // ДАН. 2009. Т. 424, № 5. С. 599–603.
4. Меграбов А.Г. Некоторые дифференциальные тождества и их приложения к уравнению эйконала // ДАН. 2010. Т. 433, № 4. С. 461–465.
5. Меграбов А.Г. Дифференциальные тождества, связывающие модуль и направление векторного поля, и гидродинамические уравнения Эйлера // ДАН. 2010. Т. 433, № 3. С. 309–313.

**ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЛЕЕВСКИХ ВОЛН  
И УПРУГОГО ВОЛНОВОДА В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ**

Митченко Д.А.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск  
mitchenko1897@mail.ru*

В данной работе было исследовано распространение поверхностных (релеевских) волн на границах в слоистых средах. Искомой величиной является частота распространения волны. Для моделирования среды были использованы уравнения линейной теории упругости (плоский случай). Задача была сведена к расчету спектра системы дифференциальных уравнений на полупрямой. При этом использована технология построения спектральных портретов для дифференциальных операторов. Показано, что внутренний слой в среде может являться волноводом.

Используя метод, описанный в одной известной работе С.Л.Соболева, из плоского волновода сконструирован цилиндрический.

Работа выполнена под руководством С.К. Годунова.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая Физика. Т. VII. М.: Наука, 1987. 246 с.
2. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 342 с.
3. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ  
ЧЕРЕЗ СТОХАСТИЧЕСКУЮ СРЕДУ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ  
ПАРАМЕТРОВ ОСРЕДНЕННОЙ РАДИАЦИОННОЙ МОДЕЛИ**

Михайлов Г.А.

*Институт вычислительной математики и математической  
геофизики СО РАН 630090, Новосибирск,  
проспект академика Лаврентьева, 6  
E-mail: gam@osmf.sccc.ru*

Основой для настоящей работы является предположение о том, что корреляционная функция реальных стохастических сред достаточно часто является экспоненциальной. Проведенные исследования показывают, что “функция пропускания” излучения, т.е. осредненная вероятность прохождения кванта излучения вдоль заданной траектории, при этом асимптотически также экспоненциальна. Это означает, что осредненная интенсивность излучения, проходящего через среду, определяется стандартным уравнением переноса с соответствующим коэффициентом поглощения. Особую роль в этих исследованиях играют кусочно - постоянные модели случайных сред, основанные на разбиениях пространства специальными “пуассоновскими” ансамблями плоскостей.

В разделе 2 получены аналитические оценки функции пропускания в предположении “пуассоновости” потока пересечений траектории частицы с базовыми плоскостями - границами областей постоянства плотности среды. Это предположение дает асимптотическую оценку эффективного детерминированного коэффициента поглощения и на этой основе оценку вероятности прохождения путем решения соответствующей стандартной задачи переноса. Кроме того, асимптотические оценки функции пропускания для более широкого класса стохастических сред построены с помощью центральной предельной теоремы для случайной “оптической длины” траектории частицы.

В работе изучается также возможность восстановления параметров радиационной модели по значению осредненной вероятности прохождения. На тестовом примере исследована устойчивость решения соответствующей обратной задачи относительно осредненных значений коэффициента поглощения и корреляционной длины случайной среды.

## ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ МНОГОЧАСТИЧНОЙ ЭВОЛЮЦИИ И ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Михайлов Г.А., Рогазинский С.В.

*Институт вычислительной математики и математической геофизики*

*СО РАН, Новосибирск*

*gam@osmf.sccc.ru, svr@osmf.sccc.ru*

Модельный процесс стохастической кинетики системы из  $N$  частиц представляет собой однородную марковскую цепь, переходы в которой осуществляются в результате элементарных парных взаимодействий. Распределение времени между ними определяется состоянием системы и является обобщенным экспоненциальным с переменным параметром  $\sigma(\bullet)$ . Мы рассматриваем эту цепь Маркова в модифицированном фазовом пространстве, вводя в число фазовых переменных номер пары, реализующей столкновение в системе. Такое преобразование фазового пространства является необходимым для вывода эквивалентной вероятностной модели интегрального уравнения, на основе которого можно строить весовые модификации статистического моделирования и реализовать параметрические оценки решения нелинейного кинетического уравнения. Известно, что в предположении “молекулярного хаоса” асимптотически, при  $N \rightarrow \infty$  соответствующая одночастичная плотность удовлетворяет уравнению Больцмана, причем, как правило, соответствующая погрешность имеет порядок  $O(1/N)$ . “Молекулярный хаос” означает факторизацию “двухчастичной” плотности, которую можно считать следствием независимости случайных частот для пересекających областей фазового пространства, то есть предположения о пуассоновости ансамбля частиц. Замечено, что при этом предположении уравнение Больцмана описывает баланс среднего числа частиц в фазовом пространстве. Таким образом, если “пуассоновость ансамбля” сохраняется (chaos propagation), то положительное решение этого уравнения заведомо существует. С целью оптимизации метода прямого статистического моделирования (ПСМ) в настоящей работе строится и обосновывается “модифицированный метод мажорантной частоты” как алгоритм статистического моделирования обобщенного экспоненциального распределения с параметром  $\sigma(\bullet) = \sum_{i=1}^m \sigma_i(\bullet)$  в предположении, что  $\sigma_i(\bullet) \leq \sigma_i^*(\bullet)$ , причем величины  $\sigma_i^*(\bullet)$  и, следовательно,  $\sigma(\bullet) = \sum_{i=1}^m \sigma_i(\bullet)$ , вычисляются достаточно просто. Отметим, что в [1] фактически рассматривался случай  $\sigma_i^*(\bullet) = \sigma^*(\bullet)/m$ .

На основе предположения о пуассоновости ансамбля частиц в работе осуществлена среднеквадратическая оптимизация глобальной оценки одночастичной плотности гистограммой, которая для заданной погрешности  $\delta$  дает подходящие значения шага  $h$  сетки осреднения и числа  $n$  независимых реализаций базовой цепи Маркова. При использовании метода мажорантной частоты трудоемкость функциональных оценок метода ПСМ растет линейно по  $N$ . Показано,

что весовые модификации ПСМ позволяют строить несмещенные оценки параметрических производных от функционалов и на этой основе решать соответствующие обратные задачи.

Работа выполнена при частичной поддержке ФЦП (госконтракт 07.514.11.4016), РФФИ (гранты № 12-01-00034-а, 12-01-00727-а) и МИП СО РАН № 47.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванов М.С., Рогазинский С. В.* Статистическое моделирование течений разреженного газа на основе принципа мажорантной частоты // Докл. АН СССР 1990. Т. 312, № 2. С. 315-320.
2. *Mikhailov G.A., Rogazinski S.V.* Probabilistic model of many-particle evolution and estimation of solutions to a nonlinear kinetic equation // Rus. J. Numer. Analys. and Math. Modelling. 2012. V. 27. № 3. P. 229–242.

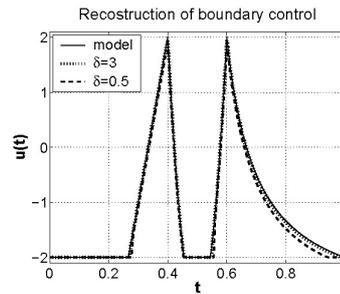
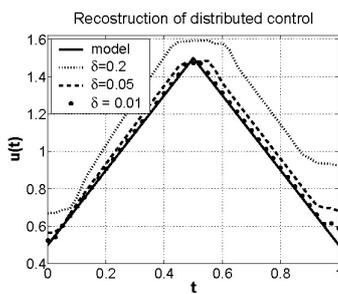
## ВОССТАНОВЛЕНИЕ СТАТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ И ГРАНИЧНЫХ УПРАВЛЕНИЙ С РЕЗУЛЬТАТАМИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Михайлова Д.О.

*Институт математики и механики Уральского отделения РАН,  
Екатеринбург  
darso@rambler.ru*

Рассматривается задача о статическом восстановлении на конечном отрезке времени  $T$  неизвестного управления, действующего в системах, описываемых краевыми задачами для уравнений с частными производными параболического типа. Математическая модель описана в [1]. Неизвестное управление входит в правую часть определяющего уравнения либо в граничные условия. Задача некорректна.

Для решения задачи реализуется подход, описанный в [2], — метод регуляризации Тихонова с негладким стабилизатором. Доказывается теорема о том, что построенный метод восстановления позволяет получить поточечную сходимость, сходимость в среднеквадратичном, сходимость вариаций и кусочно-равномерную сходимость на  $T$  регуляризованных приближений. Проводится численное моделирование, показывающее, что предлагаемый метод восстанавливает тонкую структуру искомого управления ( $\delta$  — погрешность измерений):



Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках” при поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1009) и поддержана РФФИ (проект 11-01-00073).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соболева Д. О.* Реконструкция управлений в параболических системах // Вестник Бурятского государственного университета. Математика и информатика. 2010. Вып. 9. С. 59–67.
2. *Короткий М.А.* Восстановление управлений статическим и динамическим методами регуляризации с негладкими стабилизаторами // Прикладная матем. и мех. 2009. Т. 73. Вып. 1. С. 39–53.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ТРОМБОЦИТОВ КРОВИ  
ЧЕЛОВЕКА В МОДЕЛИ СПЛЮСНУТОГО СФЕРОИДА  
ПО ИНДИКАТРИСАМ СВЕТОРАССЕЯНИЯ, ИЗМЕРЕННЫМ  
С ПОМОЩЬЮ СКАНИРУЮЩЕГО ПРОТОЧНОГО ЦИТОМЕТРА**

Москаленский А.Е., Конохова А.И., Юркин М.А., Некрасов В.М.,  
Чернышев А.В., Мальцев В.П.

*Институт химической кинетики и горения СО РАН*

*Новосибирский государственный университет*

*sunmosk@mail.ru*

Сканирующий проточный цитометр — уникальный прибор, позволяющий измерять индикатрису светорассеяния, то есть зависимость интенсивности рассеянного излучения от угла рассеяния, для одиночных частиц в потоке [1]. Основной математической задачей является восстановление характеристик частиц по индикатрисе, что представляет собой обратную задачу светорассеяния. Для этого необходимо задать оптическую модель частицы и провести нелинейную регрессию, минимизируя отличие измеренного и теоретического сигналов.

Тромбоциты — дисковидные клетки крови, основной функцией которых является предотвращение кровотечения. При повреждении сосудов тромбоциты активируются, изменяя форму, и образуют тромб, который механически препятствует выходу крови. В работе [2] показано, что наиболее подходящей моделью тромбоцитов является сплюснутый сфероид, причем отношение его полуосей в среднем равно 3. При активации клетки сферизуются и отношение полуосей приближается к 1. Исходя из этих данных, оптической моделью тромбоцита был выбран сплюснутый сфероид.

Поскольку расчет теоретической индикатрисы занимает достаточно долгое время (порядка 1 минуты), при минимизации использовалась предварительно насчитанная база данных. Параметры теоретических индикатрис набрасывались случайно в диапазонах, характерных для тромбоцитов. Проблема зависимости точек в экспериментальной индикатрисе была решена введением эффективного числа степеней свободы [3]. При этом разработанный нами подход позволяет не только определять ближайшую к экспериментальной теоретическую индикатрису (наилучшую подгонку), но и оценивать погрешности определения параметров, а также определять доверительные области в пространстве параметров.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Maltsev V.P.* Scanning flow cytometry for individual particle analysis // *Rev. Sci. Instrum.* 2000. № 71. P. 243–255.
2. *Frojmovic M. M., Panjwani R.* “Geometry of normal mammalian platelets by quantitative microscopic studies // *Biophys J.* 1976. № 16. P. 1071–1089.
3. *Strokotov D.I., Yurkin M.A., Gilev K.V., van Bockstaele D.R., Hoekstra A.G., Rubtsov N.B., Maltsev V.P.* Is there a difference between T- and B-lymphocyte morphology? // *J. Biomed. Opt.* 2009. № 14. 064036.

## ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ В ТЕОРИИ БОЛЬШИХ УПРУГОПОЛЗУЧИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Мурашкин Е.В.

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт  
автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН,  
Владивосток  
murashkin@dvo.ru*

Необходимость повышения точности математического описания процессов происходящих при технологической обработке и эксплуатации металлоизделий вынуждает учитывать упругие свойства материалов на всех стадиях жизненного цикла изделия. Рассмотрение задач в классических моделях малых деформаций невозможно, когда относительное изменение формы рассматриваемого тела велико. Одной из таких характерных задач, где нельзя обойтись без применения модели больших деформаций, является задача о моделировании процессов в окрестности микропоры в металле, происходящих под действием интенсивного давления. Актуальность данной задачи обусловлена обнаруженным на опыте эффектом существенного повышения эксплуатационных характеристик металла при интенсивном всестороннем сжатии образцов [1] “залечивания” микродефектов сплошности. Попытки смоделировать процесс залечивания микропоры в металле делались неоднократно, в том числе и на основе модели больших упругопластических деформаций [2], обладающей эффектом приспособляемости к периодическим нагрузениям по циклу “нагрузка – разгрузка” [3].

В настоящей работе решена задача о сферически симметричном сжатии шара с микропорой в центре. Условие несжимаемости среды определяет кинематику среды с точностью до неизвестной функции времени, что позволяет по известному закону деформирования определить процесс нагружения, вызывающий заданное деформированное состояние.

Работа проводилась при частичной поддержке гранта Президента РФ № МК-776.2012.1.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Горелов В.И.* Исследование влияний высоких давлений на механические характеристики алюминиевых сплавов // Прикл. механика и техн. физика. 1984. Т. 5 С. 157–158.
2. *Буренин А.А., Быковцев Г.И., Ковтанюк Л.В.* Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // ДАН. 1996. Т. 347, № 2. С. 199–201.
3. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Полоник М.В.* Возможность повторного пластического течения при общей разгрузке упругопластической среды // ДАН. 2000. Т. 375, № 6. С. 767–769.

**ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ГЕОМЕХАНИКИ ДЛЯ РЕОЛОГИЧЕСКИХ  
МОДЕЛЕЙ МАССИВОВ ГОРНЫХ ПОРОД**

Назарова Л.А., Назаров Л.А.

*Институт горного дела им. Н.А. Чинакала СО РАН,**Новосибирск 630091, Россия**larisa@isd.nsc.ru*

Рассмотрены обратные коэффициентные задачи по определению параметров уравнений состояния сплошных сред, возникающие при моделировании процессов эволюции геомеханических полей в массивах горных пород при отработке месторождений полезных ископаемых. Описание необратимого деформирования пород выполнено в рамках вязкоупругой и упругопластической моделей, а разрушение – с использованием критерия накопления повреждений. Численная реализация моделей осуществлялась с использованием оригинальных 2D и 3D кодов метода конечных элементов.

Разработана методика нахождения констант определяющих уравнений, базирующаяся на решении обратных задач по данным натурных замеров изменения во времени размеров подземных полостей в процессе эксплуатации месторождений. Характерная особенность введенных целевых функций существование нескольких расположенных на одной прямой локальных минимумов. Это позволило создать эффективный алгоритм решения обратных задач, комбинирующий методы градиентного спуска и прямого поиска. В качестве приложения для различных реологических моделей решены задачи оценки длительной прочности целиков различного назначения (несущих элементов технологии отработки месторождений полезных ископаемых) и последовательности их разрушения.

Предложен способ определения деформационных и прочностных параметров заледочного массива на месторождениях с пологими пластами. Показано, что решение обратной задачи можно найти в два этапа, соответствующих упругой и упругопластической стадиям деформирования закладки. При этом для нахождения модуля Юнга и коэффициента Пуассона необходимо вводить две целевых функции. Численные эксперименты позволили оценить число пунктов измерений для достижения приемлемой точности решения.

Работа выполнена при частичной поддержке “Visby Program” и РФФИ (грант № 12-05-00843)

**РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ ДАННЫХ ПРИ ПОМОЩИ  
РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ГАУССОВЫМ ВОЛНОВЫМ ПАКЕТАМ**Никитин В.В., Дучков А.А., Андерссон Ф.<sup>1</sup>*Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН, Новосибирск*<sup>1</sup> *Лундский университет, Лунд, Швеция**vnikitin90@gmail.ru*

Сейсмические данные характеризуются большим объемом, многомерностью и нерегулярностью (по расположению источников и приемников). Возникает необходимость их предварительной обработки. В контексте данной работы рассматривается разложение сейсмических данных по базису волновых пакетов. Разложение по такому базису может быть использовано для следующих процедур обработки: сжатие данных, подавление шумов и нецелевых волн, интерполяция и регуляризация (пересчет с нерегулярной сетки на регулярную).

Задачи подавления шумов и интерполяции сейсмических данных решаются простым применением прямого и обратного преобразования с сохранением только больших волновопакетных коэффициентов (в силу оптимальности базиса). Алгоритм преобразования по базису трехмерных волновых пакетов на регулярной сетке был реализован при помощи технологии NVIDIA CUDA в [1], получено ускорение более 45 раз по сравнению с последовательной программой.

Рассматривается модификация базиса волновых пакетов – гауссовы волновые пакеты [2]. В отличие от волновых пакетов, которые заданы в спектральной области, гауссовы волновые пакеты могут быть заданы аналитически. Это делает возможным выполнение большого количества процедур над сейсмическими данными: моделирование распространения волнового поля, миграция и т.д.

Выполнены реализации алгоритмов разложения по двумерным и трехмерным гауссовым волновым пакетам на нерегулярной сетке. При помощи технологии NVIDIA CUDA они были перенесены на GPU.

Полученные реализации алгоритмов тестировались на синтетических и реальных данных. Конечные версии программ были внедрены в пакет обработки сейсмических данных Madagascar.

Работа проводилась при частичной поддержке Шведского фонда по международному сотрудничеству в науке и высшем образовании (the work was partly supported by the Swedish Foundation for International Cooperation in Research and Higher Education).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nikitin V.V., Romanenko A.A., Duchkov A.A., Andersson F.* 3D wave-packet decomposition implemented on GPUs // Expanded Abs., SEG Annual Meeting, 2011, San Antonio. P. 3409–3413.
2. *Duchkov A.A., Andersson F., Wendt H.* Sparse wave-packet representations and seismic imaging // Expanded Abstracts, SEG Annual Meeting, 2010, Denver. P. 3318–3322.

## РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Николаев Н.Н.

*Северо-Восточный федеральный университет, Якутск*

*nike1987@mail.ru*

В работе рассматриваются коэффициентные нелинейные обратные краевые задачи для уравнения третьего порядка с интегральным и финальным условиями переопределения.

Пусть  $Q = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$  — прямоугольник в пространстве  $\mathbb{R}^2$ .

**Обратная задача I.** Найти функции  $u(x, t)$  и  $q(x)$ , связанные в прямоугольнике  $Q$  уравнением

$$u_{ttt} + u_{xx} - q(x)u = f(x, t), \quad (1)$$

при выполнении для функции  $u(x, t)$  граничных условий

$$u(x, 0) = u_1(x), \quad u_t(x, 0) = u_2(x), \quad u(x, T) = u_3(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2)$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(1, t) = \psi(t), \quad 0 < t < T, \quad (3)$$

а также условия переопределения

$$\int_0^T K(t)u(x, t)dt = \mu(x), \quad 0 < x < 1. \quad (4)$$

**Обратная задача II.** Найти функции  $u(x, t)$  и  $q(x)$ , связанные в прямоугольнике  $Q$  уравнением (1) и такие, что для функции  $u(x, t)$  выполняются начальные и граничные условия (2) и (3), а также финальное условие переопределения

$$u_t(x, T) = \mu(x), \quad x \in \Omega. \quad (5)$$

Методами регуляризации, срезывающих функций и неподвижной точки доказывается существование обобщенных решений обратных задач I и II.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012-2014 гг. (проект № 4402) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 гг. (ГК 02.740.11.0609).

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ  
ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГЕОЭЛЕКТРИКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ  
НЕЙРОСЕТЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

Оборнев И.Е., Родионов Е.А.

*Российский государственный геологоразведочный университет, Москва  
o\_ivano@mail.ru*

Обратная задача геoeлектрики в заданном классе параметризованных геoeлектрических сред на практике сводится к решению операторного уравнения I рода относительно вектора  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_N)$  параметров среды вида:

$$A_N s = e, \quad s \in S \subset \mathbb{R}^N, \quad e \in \mathbb{R}^M, \quad (1)$$

где  $A_N$  – непрерывный нелинейный оператор прямой задачи,  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_M)$  – вектор исходных данных, заданных с некоторой погрешностью  $\delta$ ,  $S$  – замкнутое ограниченное множество.

В данной работе рассматриваются классы эффективно параметризованных сред, для которых значение модуля непрерывности  $\beta_N(\delta)$  обратного оператора задачи (1) не превышает заданной величины  $\varepsilon_0(\delta)$ . Обратная задача (1) в этих классах является практически устойчивой. В работе предлагается аппроксимационный подход, при котором решение уравнения (1) ищется в виде заданной функции (нейросети) от  $e_1, \dots, e_M$  [1]:  $s_n \approx \sum_{l=1}^L v_{nl} g \left( \sum_{m=1}^M w_{lm} e_m \right)$ ,  $n = 1, \dots, N$ , где  $g$  – заданная монотонная функция, например,  $g(x) = 1/(1 + e^{-x})$ ,  $L$  – параметр, который характеризует сложность нейросети,  $V = \{v_{nl}\}$ ,  $W = \{w_{lm}\}$  – матрицы свободных коэффициентов нейросети. Если матрицы коэффициентов сети известны, то решение уравнение может быть получено в аналитическом виде для любых данных в рассматриваемом классе сред. Для определения свободных коэффициентов решается оптимизационная задача обучения нейросети методом обратного распространения ошибки [1]. Для приближенного нейросетевого решения  $s_{\delta_1}$ , полученного с невязкой  $\delta_1$ , вычисляется апостериорная оценка погрешности  $\varepsilon(s_{\delta_1}, e_\delta, \delta_1)$  для фиксированных входных данных  $e_\delta$  [2]. В работе представлены примеры численного решения 2D и 3D обратных задач МТЗ для модельных данных.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 110700662) и использовании ресурсов МСЦ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шимелевич М.И., Оборнев Е.А. Аппроксимационный метод решения обратной задачи МТЗ с использованием нейронных сетей // Физика Земли. 2009. №. 12. С. 22–38.
2. А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ СТЕПЕНИ УСТОЙЧИВОСТИ  
ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГЕОЭЛЕКТРИКИ  
В КОНЕЧНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КЛАССАХ СРЕД**

Оборнев И.Е., Родионов Е.А.

*Российский государственный геологоразведочный университет, Москва  
evgeny\_980@list.ru*

Обратная задача геоэлектрики в заданном конечно-параметрическом классе сред сводится к решению нелинейного операторного уравнения I рода относительно вектора  $s$  параметров среды:

$$A_N s = e, \quad s \in S \subset \mathbb{R}^N, \quad e \in \mathbb{R}^M, \quad (1)$$

где  $S$  – ограниченное замкнутое подмножество в  $\mathbb{R}^N$ ,  $e$  – вектор данных,  $A_N$  – нелинейный оператор прямой задачи, представляющий собой суперпозицию преобразований:  $A_N s = A_{fin}(F_N s)$ , где  $F_N$  – оператор параметризации среды,  $A_{fin}$  – конечноразностный оператор прямой краевой задачи.

Степень устойчивости решения задачи (1) в целом по множеству  $S$  определяется модулем непрерывности обратного оператора [1] и существенно зависит от детальности параметризации среды [2], а также от структуры, объема и уровня погрешности входных данных  $\delta$ . На практике важно априори оценить степень устойчивости определения параметров выделенных целевых структур, которая характеризуется значением модуля непрерывности обратного оператора  $\beta_N^a(\delta)$  на определенных подмножествах  $S^a \subseteq S$  [3].

Расчет оценок величины  $\beta_N^a(\delta)$  сводится к решению ряда соответствующих задач нелинейной условной оптимизации. В данной работе для их решения применяется метод Монте-Карло. Приводятся примеры расчета различных характеристик  $\beta_N^a(\delta)$ , и их зависимостей от детальности  $N$  параметризации среды, объема  $M$  и структуры входных данных для классов 2D, 3D сред с блочной параметризацией.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 110700662) и использовании ресурсов МСЦ.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
2. Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И. Об обратных задачах в геоэлектрике. Глава 8 в кн.: Светов Б.С. Основы геоэлектрики. М.: Изд-во ЛКИ, 2008.
3. Шимелевич М.И., Оборнев Е.А., Оборнев И.Е., Родионов Е.А. Априорные оценки степени практической неоднозначности решений обратных задач геоэлектрики // Материалы 39-й сессии Междунар. науч. семина. им. Д.Г. Успенского “Вопросы теории и практики геологической интерпретации геофизических полей”, 2012 г., Воронеж. С. 282–285.

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ  
С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ**

Павлов С.С.

*Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова, Якутск  
ststepmath@mail.ru*

Пусть  $\Omega$  есть ограниченная область пространства  $\mathbb{R}^n$  ( $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ) с гладкой границей  $\Gamma$ ,  $\Gamma = \partial\Omega$ ,  $S = \Gamma \times (0, T)$ ,  $Q = \Omega \times (0, T)$ . Далее, пусть  $a(x, t)$ ,  $\lambda(t)$ ,  $K(x, t)$ ,  $f(x, t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$  — заданные функции, определенные при  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $t \in [0, T]$ .

**Обратная задача 1:** найти функции  $u(x, t)$  и  $q(t)$ , связанные в  $Q$  уравнением:

$$u_{tt} - a(x, t)\Delta u + q(t)u_t = f(x, t), \quad (1)$$

при выполнении для функции  $u(x, t)$  начальных условий

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

граничного условия

$$u|_S = 0, \quad (3)$$

а также условия переопределения:

$$\int_{\Omega} K(x, t)u(x, t)dx = \psi(t). \quad (4)$$

**Обратная задача 2:** найти функции  $u(x, t)$  и  $q(t)$ , связанные в  $Q$  уравнением

$$u_{tt} - \Delta u + \lambda(t)u_t + q(t)u = f(x, t), \quad (5)$$

при выполнении для функции  $u(x, t)$  условий (2), (3) и (4).

В изучаемых обратных задачах 1 и 2 условия (2) и (3) суть условия обычной первой начально-краевой задачи, условие (4) — условие переопределения; наличие этого условия объясняется тем, что помимо неизвестного решения  $u(x, t)$  требуется найти также еще неизвестную функцию  $q(t)$ .

Подобные обратные задачи в одномерном случае ранее изучались в работах [1,2].

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Валитов И.Р. Обратные задачи для гиперболических уравнений: Автореферат дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Стерлитамакская гос. пед. акад. 2009. 20 с.
2. Валитов И.Р., Кожанов А.И. О разрешимости некоторых гиперболических обратных задач с двумя неизвестными коэффициентами // Матем. заметки ЯГУ. 2007. Т. 20, № 14. С. 3–16.

## ЯДРО ОСНОВНЫХ АЛГЕБР ЛИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Панов А.В.

*Челябинский государственный университет, Челябинск*

*gjd@bk.ru*

Рассматривается система уравнений в частных производных [1]

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_i}{dt_i} + \rho_i \operatorname{div} \bar{u}_i &= 0, \\ \rho_i \frac{d\bar{u}_i}{dt_i} + m_i \nabla P(\rho_1, \rho_2) &= -\frac{\rho_2}{\tau} (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) (-1)^{i+1}, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

где  $\bar{u}_i = (u_{ix}, u_{iy}, u_{iz})$  – вектор скорости  $i$ -й фазы,  $\rho_i$  – плотность  $i$ -й фазы,  $m_i$  – объемная доля  $i$ -й фазы,  $P(\rho_1, \rho_2)$  – общее давление среды,  $\frac{d}{dt_i} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_i \nabla$ . Система описывает неравновесное течение смеси газа и мелких частиц в трехмерном пространстве. Температурными эффектами пренебрегаем. Давление является функциональным параметром системы. Первая фаза соответствует газу, вторая – частицам.

Методами группового анализа [2] найдено ядро основных групп симметрий данной системы. Базис данного ядра состоит из инфинитезимальных операторов

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = \frac{\partial}{\partial z}, \\ X_5 &= t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u_{1x}} + \frac{\partial}{\partial u_{2x}}, \quad X_6 = t \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial u_{1y}} + \frac{\partial}{\partial u_{2y}}, \quad X_7 = t \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial u_{1z}} + \frac{\partial}{\partial u_{2z}}, \\ X_8 &= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} - u_{1y} \frac{\partial}{\partial u_{1x}} + u_{1x} \frac{\partial}{\partial u_{1y}} - u_{2y} \frac{\partial}{\partial u_{2x}} + u_{2x} \frac{\partial}{\partial u_{2y}}, \\ X_9 &= z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} + u_{1z} \frac{\partial}{\partial u_{1x}} - u_{1x} \frac{\partial}{\partial u_{1z}} + u_{2z} \frac{\partial}{\partial u_{2x}} - u_{2x} \frac{\partial}{\partial u_{2z}}, \\ X_{10} &= -z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z} - u_{1z} \frac{\partial}{\partial u_{1y}} + u_{1y} \frac{\partial}{\partial u_{1z}} - u_{2z} \frac{\partial}{\partial u_{2y}} + u_{2y} \frac{\partial}{\partial u_{2z}}. \end{aligned}$$

Работа проводилась при поддержке РФФИ, грант № 10-01-96007-р\_урал\_а.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федоров А.В. Физико-математическое моделирование подавления детонации облаками мелких частиц / А.В. Федоров, П.А. Фомин, В.М. Фомин, Д.А. Тропин, Дж.-Р. Чен. Новосибирск: Изд-во НГАСУ, 2011. 156 с.
2. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.

**ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЯ  
ОБРАТНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ЗАДАЧИ  
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ ПО ДАННЫМ  
ГРАНИЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ**

Пененко А.В.

*Институт вычислительной математики и математической геофизики  
СО РАН, Новосибирск  
aleks@ommgp.sscs.ru*

Целью работы является разработка алгоритмов восстановления характеристик теплопроводности слоистой среды по данным тепловых измерений. Целевая область приложения разрабатываемых алгоритмов – методы неразрушающего контроля изделий из композитных материалов. И для того, чтобы рассматривать различные обратные задачи с единых позиций, осуществляется переход от физической размерной постановки к безразмерной канонической форме.

На основе набора сопряженных задач модели теплопроводности строится оператор чувствительности, который связывает разницу откликов двух модельных сред на некоторое тепловое воздействие с разницей их параметров и является обобщением производной Фреше оператора прямой задачи. Анализ сингулярной структуры оператора чувствительности позволяет исследовать обратную задачу и сравнить различные постановки измерительного эксперимента.

Для решения обратной коэффициентной задачи рассматривается итерационный алгоритм Ньютоновского типа с использованием сингулярной срезки оператора чувствительности. Основная идея алгоритма состоит в постепенном восстановлении решения на расширяющейся последовательности сингулярных подпространств оператора чувствительности. При этом контролируется монотонность убывания целевого функционала обратной задачи, а остановка алгоритма производится по принципу невязки Морозова и по числу обусловленности оператора чувствительности. Начальное приближение для итерационного алгоритма выбирается на основе обратной задачи с постоянным коэффициентом в полубесконечной области, когда известно аналитическое решение.

Целью проведения численных экспериментов является исследование влияния на качество решения случайного шума в данных измерений, погрешности численного решения, неточного задания границ раздела слоев и модели процесса теплопроводности. Для учета случайного шума используются статистические методы, а в качестве алгоритма оценки точности численного решения рассматривается правило Рунге. В численной реализации алгоритмов используются конечно разностные и дискретно-аналитические численные схемы.

Работа выполнена при частичной поддержке Программ фундаментальных исследований № 4 Президиума РАН и № 3 Отделения математических наук РАН, проекта РФФИ 11-01-00187, а также госконтракта № 14.740.11.0350 по программе “Проведение научных исследований коллективами научно-образовательных центров в области математики” ФЦП “Научно-педагогические кадры инновационной России”.

## ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ВОЛНОВОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Первалова Е.Г.

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск  
ulan\_ev@mail.ru*

Рассматривается математическая модель уединенных внутренних волн большой амплитуды в слабостратифицированной жидкости. Предполагается, что фоновый профиль плотности жидкости зависит линейно или экспоненциально от глубины. В этой ситуации параметры волнового движения (скорость нелинейной волны, ее амплитуда и т. п.) определяются коэффициентом, задающим тонкую структуру стратификации [1]. В данной работе исследуется обратная задача восстановления коэффициента плотности по известной зависимости между скоростью уединенной волны и ее амплитудой (дисперсионной кривой). Данная задача сводится к решению линейного интегрального уравнения Фредгольма первого рода с ядром специального вида. Для этого уравнения анализируются свойства единственности решений. В случае полиномиальной стратификации установлено взаимно однозначное соответствие между коэффициентом плотности жидкости и дисперсионной кривой.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Makarenko N.I., Maltseva J.L., Kazakov A. Yu.* Conjugates flows and amplitude bounds for internal solitary waves // *Nonlin. Processes Geophys.* 2009. V. 16. P. 169-178.

**ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В ОБРАБОТКЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ**

Пикалов В.В.

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича  
СО РАН, Новосибирск  
pikalov@itam.nsc.ru*

В лекции дан обзор использования методов решения обратных задач для некоторых специфических задач обработки изображений. В частности, рассмотрены задачи подавления шума на изображениях, использования разнообразных способов фильтрации.

Показано, как сочетание алгоритмов инверсии интегрального преобразования Радона с вэйвлет-фильтрацией позволяет выполнить так называемую скелетизацию, – выделение контуров и границ объектов на изображении. Частный случай интегрального преобразования Радона, – преобразование Хафа, – дает возможность выделять на изображении линейные структуры, а в его обобщении – и кольцевые. Также рассмотрена широко известная задача восстановления изображения по его проекциям, нашедшая важное применение в томографических приложениях.

Приводится классификация изображений в томографии (суммарное, Вайнберга, Фаридани, Баранова и т. п.), детально излагаются алгоритмы их получения. Указано на возможность применения операторов векторной томографии в задаче устранения точечных шумов на изображении.

Работа проводилась при частичной поддержке СО РАН (интеграционный проект № 14).

**СИНГУЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ОПЕРАТОРА НОРМАЛЬНОГО  
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ,  
ЗАДАННОГО В ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ**

Полякова А.П.

*Институт математики им. С.Л.Соболева, Новосибирск*

*anna.polyakova@ngs.ru*

В данной работе рассматривается задача векторной томографии, состоящая в восстановлении потенциальной части трехмерного векторного поля, заданного в единичном шаре, по его известному нормальному преобразованию Радона. Нормальное преобразование Радона векторного поля  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$  определяется формулой:

$$[\mathcal{R}^\perp \mathbf{w}](\xi, s) = \iint_{P_{\xi, s}} (w_1 \xi^1 + w_2 \xi^2 + w_3 \xi^3) dudv,$$

где  $P_{\xi, s}$  — плоскость, перпендикулярная направлению  $\xi$  и отстоящая на расстоянии  $|s|$  от начала координат,  $u, v$  — координаты локальной системы координат на плоскости  $P_{\xi, s}$ . Мы можем восстановить лишь потенциальную часть векторного поля, поскольку его соленоидальная часть лежит в ядре нормального преобразования Радона.

Для решения поставленной задачи использовался метод сингулярного разложения. Основная идея метода заключается в следующем: образ оператора представляется в виде ряда по базисным элементам с сингулярными числами в качестве коэффициентов. Тогда образ обратного оператора будет представлять собой ряд со схожей структурой, в котором задействованы прообразы этих базисных элементов и те же сингулярные числа.

Автором построено сингулярное разложение оператора нормального преобразования Радона. В исходном пространстве интегрируемых с квадратом векторных полей, заданных в единичном шаре, ортонормированные базисы строятся с помощью полиномов Якоби и сферических гармоник. Используя результат, полученный в [1], удалось показать, что соответствующие ортонормированные базисы в пространстве образов строятся на основе полиномов Гегенбауэра и сферических гармоник. Найдено сингулярное разложение оператора нормального преобразования Радона, получена формула обращения оператора.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 11-07-00447-а), СО РАН (проект совместных фундаментальных исследований СО РАН и УрО РАН № 2012-32).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Louis A.K.* Orthogonal function series expansions and the null space of the Radon transform. // Society for industrial and applied mathematics. V. 15, № 3 (1984). P. 621–633.

**РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ  
ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ  
С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ**

Попов Н.С.

*Северо-Восточный федеральный университет  
имени М.К. Аммосова, Якутск  
popovnsrg@mail.ru*

В работе рассматриваются краевые задачи для псевдогиперболических уравнений третьего порядка с интегральным условием на боковой границе. Исследованию подобных нелокальных краевых задач для гиперболических уравнений посвящены работы [1, 2].

Пусть  $\Omega$  есть ограниченная область пространства  $\mathbb{R}^n$  с гладкой границей  $\Gamma$ ,  $Q = \Omega \times (0, T)$ ,  $S = \Gamma \times (0, T)$  — боковая граница  $Q$ .

**Краевая задача.** Найти функцию  $u(x, t)$  являющуюся в цилиндре  $Q$  решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_t - \Delta u) - Bu = f(x, t), \quad Bu \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (b^{ij}(x)u_{x_j}) + b(x, t)u \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(x, t)|_{(x,t) \in S} = \int_{\Omega} K(x, y, t)u(y, t)dy|_{(x,t) \in S}. \quad (3)$$

Предполагаем выполнение условия на оператор  $B$ :

$$\sum_{i,j=1}^n b^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2), \quad \alpha > 0, \quad \xi_i \in \mathbb{R}^n.$$

В работе методом продолжения по параметру доказывается регулярная разрешимость нелокальной краевой задачи (1)–(3).

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012-2014 гг. (проект № 4402) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 гг. (ГК 02.740.11.0609).

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Кожанов А.И.* О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка // Докл. АН. 2009. Т. 427, № 6. С. 747–749.
2. *Кожанов А.И. Пулькина Л.С.* О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 9. С. 1116–1172.

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРЯМО И ОБРАТНО  
ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

Попов С.В.

*Северо-Восточный федеральный университет**имени М.К. Аммосова, Якутск**madu@ysu.ru*

Пространственно нелокальные краевые задачи для параболических уравнений, а также для параболических уравнений второго порядка с меняющимся направлением времени рассматривались в работах [1,2]. В работах Попова С.В. явно представлены условия  $[p]$ -разрешимости для краевых задач для  $2n$ -параболических уравнений с меняющимся направлением времени, когда  $n$  — произвольное натуральное число. Для доказательства  $[p]$ -разрешимости при  $n = 2$  и  $n = 3$  были рассмотрены общие диагональные условия склеивания, более того, были найдены зависимости показателей гильбертовских пространств от весовых функций склеивания, а при  $n \geq 4$  были рассмотрены непрерывные условия склеивания, включая  $2n - 1$ -ю производную.

В работе рассматриваются пространственно нелокальные краевые задачи для  $2n$ -параболических уравнений с меняющимся направлением времени. Для таких задач гладкость начальных и граничных данных не обеспечивают принадлежность решения гильбертовским пространствам. Применение теории сингулярных уравнений дает возможность наряду с гладкостью данных задачи, указать дополнительно необходимые и достаточные условия, обеспечивающие принадлежность решения пространствам  $H_x^{p,p/2n}$  при  $p \geq 2n$ . Применение единого подхода при общих условиях склеивания (сопряжения) для таких уравнений дает показать, что нецелый показатель  $p - [p]$  гильбертовского пространства может существенно влиять как на количество условий разрешимости, так и на гладкость искомого решения для  $2n$ -параболических уравнений с меняющимся направлением времени.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012-2014 гг. (проект № 4402) и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 гг. (ГК 02.740.11.0609).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кожанов А.И.* О разрешимости некоторых пространственных нелокальных краевых задач для линейных параболических уравнений // Вестн. Самарского ун-та. Естественная серия. 2008, № 3(62). С. 165–174.
2. *Тулсынов М.С.* Об одной краевой задаче для уравнения теплопроводности с меняющимся направлением времени с нелокальными граничными условиями Самарского // Неклассические уравнения математической физики: Сб. науч. работ / Под ред. А.И. Кожанова. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2010. С. 279-292.

## РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Прокопьев А.В.

*Северо-Восточный федеральный университет, Якутск*

*ProkorevAV@gmail.com*

Пусть  $\Omega$  есть ограниченная область пространства  $\mathbb{R}^n$  с гладкой границей  $\Gamma$ ,  $S = \Gamma \times (0, T)$ ,  $Q$  есть цилиндр  $\Omega \times (0, T)$ ,  $0 < T < +\infty$ ,  $a^{ij}(x)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $a(x, t)$ ,  $f(x, t)$ ,  $K(x, t)$ ,  $\mu(x)$  — заданные функции, определенные при  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $t \in [0, T]$  соответственно. В работе рассматривается уравнение эллиптико-параболического типа:

$$u_t - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a^{ij}(x) u_{x_j} \right) + q(x)u = f(x, t), \quad (1)$$

с начально-краевыми условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad k_0 \rho^\alpha(x) |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq k_1 \rho^\alpha(x) |\xi|^2, \quad (2)$$

где  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 < k_0 \leq k_1$ ,  $0 < \alpha < n - 1$ ,  $\rho(x) = \text{dist}(x, \Gamma; x \in \bar{\Omega})$ .

**Обратная задача I.** Найти функции  $u(x, t)$  и  $q(x)$ , связанные в цилиндре  $Q$  уравнением (1) и такие, что для функции  $u(x, t)$  выполняются начальные и граничные условия (2), а также интегральное условие переопределения

$$\int_{\Omega} K(x, t) u(x, t) dx = 0, \quad t \in [0, T].$$

**Обратная задача II.** Найти функции  $u(x, t)$  и  $q(x)$ , связанные в цилиндре  $Q$  уравнением (1) и такие, что для функции  $u(x, t)$  выполняются начальные и граничные условия (2), а также финальное условие переопределения

$$u(x, T) = \mu(x), \quad x \in \Omega.$$

Исследованию подобных краевых задач для параболических уравнений посвящены работы [1, 2].

Методами регуляризации, срезающих функций и неподвижной точки доказывается существование обобщенного решения обратных задач I и II.

Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования и науки РФ № 02.740.11.0609.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kozhanov A.I.* On solvability of an inverse problem with an unknown coefficient and right-hand side for a parabolic equation // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2002. V. 10, N 6. P. 611–627.
2. *Kozhanov A.I.* An inverse problem with an unknown coefficient and right-hand side for a parabolic equation II // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2003. V. 11, N 5. P. 505–522.

## ОБ ОДНОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ МОДЕЛИ РАЗВИВАЮЩИХСЯ СИСТЕМ

Расторгуева Е.В.

*Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск*  
*zhuzhu1987@gmail.com*

В [1], [2] рассматривалось применение односекторного варианта интегральной модели типа В.М. Глушкова развивающихся систем

$$\int_{a(t)}^t K(t, s)\varphi(s)ds = f(t), \quad t \in [t_0, T], \quad \varphi(t) = \varphi^0(t), \quad t \in [a(t_0), t_0], \quad a(t_0) < t_0, \quad (1)$$

для определения долгосрочной стратегии ввода мощностей крупной электроэнергетической системы с учётом выбывания устаревшего оборудования.

В работе рассматривается новая интегральная модель

$$\sum_{i=0}^{n-1} K_i(t) \int_{\alpha_{i+1}t}^{\alpha_i t} \varphi(s)ds = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

отличием которой от описанной выше модели является то, что мы не можем использовать информацию на предыстории, если момент возникновения системы совпадает с началом процесса моделирования ( $a(t_0) = t_0$ ). Здесь  $1 = K_0(t) \geq \dots \geq K_i(t) \geq \dots \geq K_{n-1}(t) \geq 0$ ,  $1 = \alpha_0 > \dots > \alpha_i > \dots > \alpha_n \geq 0$ .

Для нахождения приближенного решения уравнения (1) используется численный метод, основанный на применении функционального уравнения, полученного при помощи дифференцирования уравнения (1) по  $t$ . Для определения промежуточных значений сеточного решения, не входящих в основную сетку с целочисленными узлами, применяется линейная интерполяция. На серии тестовых примеров показано, что данный численный метод, реализованный в Maple 13, имеет второй порядок точности. Предполагается, что разработанный вычислительный алгоритм будет использован для решения реальной задачи из области электроэнергетики.

Работа проводилась при частичной поддержке РФФИ (грант № 12-01-00722-а).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Апарцин А.С.* Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999.
2. *Маркова Е.В., Сидлер И.В., Труфанов В.В.* О моделях развивающихся систем типа Глушкова и их приложениях в электроэнергетике // Автомат. и телемех. 2011. №. 7. С. 20–28.

**РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ  
АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО  
МОНИТОРИНГА НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ  
ЛОКАЛИЗАЦИИ ИСТОЧНИКА ЗАГРЯЗНЕНИЯ  
АТМОСФЕРНОГО ВОЗДУХА**

Рахметуллина С.Ж., Пененко А.В.<sup>1</sup>

*Восточно-Казахстанский государственный технический университет  
им. Д. Серикбаева, Усть-Каменогорск, Казахстан, Rakhmetullinas@mail.ru*

<sup>1</sup>*Институт вычислительной математики и математической геофизики  
СО РАН, Новосибирск, aleks@ommgp.sccc.ru*

Целью работы является исследование различных подходов к разработке математического обеспечения систем экологического мониторинга. В существующей системе экологического мониторинга атмосферного воздуха г. Усть-Каменогорска функционирует автоматизированная система наблюдений за качеством воздуха, метеорологическими параметрами, радиационным фоном, уровнем воды. Внедрение данной системы позволяет получать оперативную информацию о состоянии атмосферного воздуха, а также использовать базу данных ретроспективных наблюдений. Её функционал предполагается расширить. Для этого рассматриваются и сравниваются различные подходы к решению обратной задачи поиска источников загрязнения и определения параметров эмиссий загрязняющих примесей.

Представлены результаты практического применения для решения обратной задачи поиска источников загрязнения и определения их параметров методики прямого и обратного моделирования, основанной на совместном использовании математических моделей и данных наблюдений [1, 2]. Эта методика базируется на вариационных принципах, теории сопряженных уравнений и методах теории оптимизации. При моделировании переноса примеси в атмосфере используются как Эйлера, так и Лагранжевы подходы [3].

Работа проводилась в рамках государственного заказа по бюджетной программе 120 “Грантовое финансирование”, Комитет науки Министерства образования и науки Республики Казахстан.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Пененко В.В., Алоян А.Е. Модели и методы для задач охраны окружающей среды. Новосибирск: Наука, 1985. 255 с.
2. Пененко В.В., Пененко А.В. Технологии численного моделирования. Вариационные принципы в природоохранном прогнозировании: Метод. указания. МОиН РК, ВКГТУ им. Д. Серикбаева. Усть-Каменогорск: Изд-во ВКГТУ, 2011.
3. Пененко В.В., Пьянова Э.А., Чернова А.В. Изучение процессов мезомасштабного переноса примесей с помощью моделей эйлера и лагранжева типов // Оптика атмосферы и океана. 2007. Т. 20, № 06. С. 484-490.

## ДЕКОДИРОВАНИЕ НОРМЫ НАКОПЛЕНИЯ МЕТОДАМИ СИСТЕМНОЙ ДИНАМИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Рыженков А.В.

*Институт экономики и организации промышленного производства СО РАН,  
Новосибирск  
ryzhenko@ieie.nsc.ru*

Теоретические модели капиталистического накопления (ТМ-1, ТМ-2 и ТМ-3) разработаны как альтернативы «неоклассическим», кейнсианским и монетаристским моделям делового цикла [1, 2]. Данные модели прошли экспериментальную и статистическую проверку для базового периода (1969–2008 гг.) и послужили основой для сценариев развития экономики США до 2062 г.

ТМ-1, ТМ-2 и ТМ-3 эндогенно генерируют циклы роста с периодом около 7–11 лет. Эти модели, в частности, содержат существенные нелинейные отношения в обобщенной функции технического прогресса и в инвестиционной функции, которые играют ключевую роль в объяснении резких и энергичных перемен конъюнктуры в экономических циклах.

ТМ-1, ТМ-2 и ТМ-3 включают эндогенную норму накопления ( $k$ ) и эндогенную фондоемкость ( $s$ ) в качестве переменных типа запаса. Другие переменные данных моделей типа запаса: выработка ( $a$ ), норма занятости ( $v$ ) и относительная оплата труда ( $u$ ).

ТМ-1 усиливает тенденцию нормы прибыли к понижению в 1969–1982 гг. за счет вероятной позитивной зависимости темпа прироста оплаты труда от нормы занятости и от темпа прироста фондовооруженности. Для преодоления этой тенденции капитал, вероятно, преобразовал ТМ-1 в ТМ-2, подчинив рост оплаты труда росту выработки. Соответствующие структурные трансформации, по оценке, произошедшие в США в 1983 г. и 2008 г., нацелены на существенное повышение долговременной рентабельности. В ТМ-3 предположено, что для стабилизации капиталистического воспроизводства фирмы и государство устанавливают целевой темп прироста прибавочной стоимости в зависимости от разницы между целевой ( $X$ ) и текущей ( $v$ ) нормами занятости. Продемонстрировано, что ТМ-3 полнее отражает экономические интересы трудящихся, чем ТМ-2.

Экстенсивные связи нормы накопления выявлены посредством расчета частных производных для переменных моделей. Сначала определены общие контуры, включающие норму накопления ( $k$ ) в ТМ-1, ТМ-2 и ТМ-3, а затем – специфические контуры. Исследованы интенсивные связи нормы накопления. Для их обнаружения рассчитаны частные производные скоростей фазовых переменных для трех систем обыкновенных дифференциальных уравнений пятого порядка (со специфическим последним дифференциальным уравнением).

Конкретизировано сочетание преемственности (общих контуров) и индуцированных «мутаций» (специфических контуров) в эволюции капиталистического воспроизводства. По официальным данным за 1948–2009 гг. получены вероят-

ностные оценки нормы накопления и проведено их тестирование с помощью статистических критериев значимости.

Тем самым настоящее исследование, используя методы системной динамики и математической статистики, развивает экономическую теорию и способствует углубленному познанию социального «генома» человека. В продолжающемся фундаментальном поиске микробиология служит эвристическим источником и естественноисторической основой для решения обратных и некорректных экономико-математических задач.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ryzenkov A.* The structural crisis of capital accumulation in the USA and its causa prima // The 28th Intern. System Dynamics Conf., July 25–29, 2010, Seoul (Korea). Seoul, 2010. [Electron. resource]. <http://www.systemdynamics.org/conferences/2010/proceed/papers/P1353.pdf>.
2. *Рыженков А.В.* Декодирование нормы капиталистического накопления – шаг в расшифровке социального “генома” человека // Индустриальное развитие России / Отв. ред. А.Г. Коржубаев, Л.К. Казанцева. Новосибирск: ИЭОПП СО РАН, 2012. С. 240–261.

## ОБРАТНЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ВЕЩЕСТВА

Сазандрашвили А.Ю.

*Дальневосточный федеральный университет, Владивосток*  
*arsvoo@mail.ru*

Целью работы является теоретический и численный анализ обратной экстремальной задачи для линейной нестационарной модели распространения вещества. Указанная задача возникает при исследовании процессов распространения загрязнений в природных водоемах.

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2$  или  $3$ ) – ограниченная область с липшицевой границей  $\Gamma$ , состоящая из двух частей  $\Gamma_D$  и  $\Gamma_N$ . Исходная начально-краевая задача для концентрации вещества  $\varphi$  описывается следующими соотношениями (см.[1]):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \lambda \Delta \varphi + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi + k\varphi = f \text{ в } Q_T = \Omega \times (0, T), \quad (1)$$

$$\varphi|_{\Gamma_D} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \alpha(x)\varphi|_{\Gamma_N} = \chi, \quad (2)$$

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{u}$  – скорость,  $k$  – величина, характеризующая распад загрязняющегося вещества за счет химических реакций,  $f$  – плотность объемных источников примеси,  $\lambda = \text{const}$  – коэффициент диффузии,  $\alpha$  и  $\chi$  – заданные функции на участке  $\Gamma_N$  границы  $\Gamma$ ,  $\varphi_0$  – заданная в  $\Omega$  функция.

Для модели (1)–(3) сформулирована и исследована обратная экстремальная задача, заключающаяся в нахождении неизвестных функций  $f$  и  $k$  по дополнительной информации о решении. Указанная задача сводится к экстремальной задаче минимизации определенного функционала качества на слабых решениях исходной задачи (1)–(3). Установлены достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие существование и единственность решения данной задачи. Для численного решения задачи идентификации разработан алгоритм, основанный на методе Ньютона и методе конечных элементов дискретизации краевых задач. Указанный численный алгоритм реализован на свободно распространяемом программном обеспечении FreeFem++, проведены вычислительные эксперименты по решению обратных задач, установлены количественные зависимости точности восстановления неизвестных коэффициентов уравнения от выбора значения параметра, имеющего смысл параметра регулязации, числа Пекле и других параметров.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев Г.В., Терешко Д.А.* Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука. 2008. 365 с.

**ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ  
КОШИ – РИМАНА**

Сатторов Э.Н., Эрмаматова М.Э.

*Самаркандский государственный университет**Sattorov-e@rambler.ru*

В работе рассматривается задача аналитического продолжения решения обобщенной системы Коши – Римана в пространственной неограниченной области по ее значениям на части границы этой области, т. е. задача Коши. Как известно, использование обобщенной системы Коши – Римана в физических приложениях привело к далеко идущим обобщениям [1]-[3]. Рассматриваемая система эллиптическая, задача Коши для эллиптических уравнений неустойчива относительно малого изменения данных, т. е. некорректна [4]. В некорректных задачах теорема существования предполагается заданной априори. Более того, предполагается, что решение принадлежит некоторому заданному подмножеству функционального пространства, обычно компактному ([5], с. 4). Единственность решения следует из общей теоремы Холмгрена ([6], с. 58).

После установления единственности в теоретических исследованиях некорректных задач возникают важные вопросы получения оценки условной устойчивости и построения регуляризирующих операторов. В 1926 г. Т.Карлеман ([5], с. 41) построил формулу, которая связывает значения аналитической функции комплексного переменного в точках области с ее значениями на куске границы этой области. На основе этой формулы в ([5], с.34) введено понятие функции Карлемана задача Коши для уравнения Лапласа и в некоторых случаях указан способ ее построения. Конструкция функции Карлемана дает возможность в этих задачах построить регуляризацию и получить оценку условной устойчивости. На протяжении последних десятилетий не ослабевал интерес к классической некорректной задаче математической физики. Это направление в исследовании свойств решений задачи Коши для уравнения Лапласа начато в 50-х годах и развивалось впоследствии. Из выше сказанного нам удалось построить матрицу Карлемана в явном виде и на её основе регуляризованное решение задачи Коши.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brackx F., Delanghe K., Sommen F.* Clifford analysis. L.: Pitman, 1982. V.76. 308 p.
2. *Владимиров В.С., Волович И.В.* Суперанализ // Теоретическая и математическая физика. 1984. Т. 59. № 1. С.3-27.
3. *Владимиров В.С., Волович И.В.* Суперанализ. II. Интегральное исчисление // Теоретическая и математическая физика. 1984. Т. 60. № 2. С. 169-198.
4. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. С. 38-70.
5. *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962. 92 с.

6. Берс А., Джонс Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966. 351 с.
7. Лаврентьев М.М. О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка // ДАН СССР. 1957. Т. 112, № 2. С. 195-197.

**ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОДНОМЕРНОЙ  
ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ  
С МГНОВЕННЫМ ИСТОЧНИКОМ**

Сатыбаев А.Дж., Калдыбаева Г.А.  
Ошский технологический университет  
akbar\_begmatov@mail.ru

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу термоупругости

$$\rho(z)U_{tt} = (\lambda(z) + \mu(z))U_{tt} + (\lambda(z) + \mu(z))'_z * U'_z - ((3\lambda(z) + 2\mu(z)) * R(\theta(z, t)))'_z,$$

$$z \in R_+, t \in R_+; \quad (1)$$

$$u(z, t)|_{t>0} = 0, \quad U_{z=0} = -\frac{1}{2}\delta(t), \quad (2)$$

$$U(z, t)|_{z=0} = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

где  $F(x, t) = R(\theta(z, t)) = \int_0^{\theta(z, t)} \alpha(y) dy$ ,  $\alpha(y)$  - тепловое расширение,  $\lambda(z)$ ,  $\mu(z)$

- коэффициенты Ламэ,  $\rho(z)$  - плотность среды.

**Прямая задача заключается** в определении функции  $U(z, t)$  - возмущения среды из задачи (1) - (2) при известных коэффициентах  $\rho(z)$ ,  $\lambda(z)$ ,  $\mu(z)$ ,  $\alpha(z)$ .

**Обратная задача заключается** в определении функции  $\alpha(z)$  - тепловое расширение из задачи (1)-(3) при известных коэффициентах  $\rho(z)$ ,  $\lambda(z)$ ,  $\mu(z)$ , а также при известной дополнительной информации  $f(t)$ .

Здесь прямая и обратная задача решена конечно-разностным методом и получены графики точных и приближенных решений.

А также проанализированы полученные приближенные и точные решения на модельных примерах.

Анализ показал, что приближения достаточно близки и получены относительные погрешности для каждого приближения.

Установлены устойчивости приближенного решения поставленной задачи.

## О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Сафиуллова Р.Р.

*Стерлитамакская государственная педагогическая академия*

*и.м. З. Бишиевой, Стерлитамак*

*regina-saf@yandex.ru*

Для уравнений гиперболического типа исследуется разрешимость некоторой задачи нахождения вместе с решением дополнительной неизвестной функции.

Пусть  $Q$  есть цилиндр конечной высоты  $T$ ,  $Q = \{(x, t) | x \in [0, 1], t \in [0, T]\}$ .

Пусть  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$ ,  $\tilde{\varphi}(t)$ ,  $\tilde{\psi}(t)$ ,  $\mu(t)$  – заданные при  $x \in [0, 1]$ ,  $t \in [0, T]$  функции.

Рассматривается следующая обратная задача: найти функции  $u(x, t)$ ,  $q(t)$ , связанные в цилиндре  $Q$  уравнением

$$u_{tt} - u_{xx} + q(t)u_t = 0,$$

при выполнении для функции  $u(x, t)$  условий

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x),$$

$$u_x(0, t) = \tilde{\varphi}(t),$$

$$u_x(1, t) = \tilde{\psi}(t),$$

$$u(0, t) = \mu(t).$$

Для поставленной обратной задачи доказывается теорема существования регулярных решений.

При доказательстве используется техника, основанная на переходе от исходной обратной задачи к некоторой вспомогательной задаче, доказательстве разрешимости этой задачи и далее построении с помощью решения вспомогательной задачи решения исходной задачи.

При решении вспомогательной задачи используются метод регуляризации, срезки и метод продолжения по параметру.

**ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ  
ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ С РАЗРЫВНЫМИ  
КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

Седипков А.А.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск  
sedipkov@gmail.com*

Рассмотрим краевую задачу

$$-\frac{1}{\sigma(x)}(\sigma(x)w_x)_x = \lambda w, \quad x > 0, \quad (1)$$

$$w_x|_{x=0} = 0, \quad (2)$$

где коэффициент  $\sigma(x)$ , называемый импедансом, является строго положительной кусочно-гладкой функцией с конечным числом разрывов первого рода. Будем предполагать, что  $\sigma(x) \equiv \text{const}$  при  $x \geq x_* > 0$ .

Пусть  $\lambda = \omega^2$ . Обозначим через  $e(x, \omega)$  решение (1), совпадающее с  $\exp(i\omega x)$  при  $x \geq x_*$  и такое, что  $e, \sigma(x)e_x \in W_{2,loc}^1(0, \infty)$ . Функцию  $e(x, \omega)$  называют решением Йоста, а функцию  $j(\omega) = e_x(0, \omega)$  — функцией Йоста.

Обратная спектральная задача для (1)–(2) состоит в восстановлении импеданса  $\sigma(x)$  по функции Йоста  $j(\omega)$ .

Установлено, что если точки разрыва импеданса несоизмеримы, т. е. никакая их линейная комбинация с целыми коэффициентами не равна нулю, то разрывы однозначно восстанавливаются по асимптотике функции Йоста  $j(\omega)$  при  $|\omega| \rightarrow \infty$ . Построен алгоритм позволяющий восстановить разрывы импеданса за конечное число шагов.

Кроме того, установлено, что импеданс на интервалах непрерывности однозначно определяется функцией Йоста  $j(\omega)$ , и восстановление импеданса сводится к решению некоторого линейного интегрального уравнения Фредгольма в соответствующем банаховом пространстве. Построена конструктивная процедура восстановления импеданса на интервалах непрерывности.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-00390), Президиума РАН (программа фундаментальных исследований № 15), Сибирского отделения РАН (междисциплинарный интеграционный проект № 30).

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Sedipkov A.A.* The inverse spectral problem for the impedance equation with piecewise continuous coefficients // Proc. World Congr. on Engineering and Technol., 2011. IEEE press, 2011. V. 1, P. 509–511.
2. *Седипков А.А.* Восстановление разрывов оператора Штурма – Лиувилля с кусочно-гладкими коэффициентами // Вестн. НГУ. 2012. Т. 12. Вып. 1. С. 114–125.

## О КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ИТЕРИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Синявский А.Г.

*Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова, Якутск  
Sinyavsk\_88@mail.ru*

В работе рассматривается начально-краевая задача для итерированного уравнения теплопроводности с меняющимся направлением времени. Исследования корректности для уравнения теплопроводности с меняющимся направлением времени рассматривались в работах [1].

Пусть  $n \geq 2$  — натуральное число. В бесконечной полосе  $Q = (|x| < +\infty) \times (0, T)$  рассматривается краевая задача

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \operatorname{sgn} x \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{(n)} u(x, t) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k} \Big|_{t=0} = f_k(x) \quad x > 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k} \Big|_{t=T} = g_k(x) \quad x < 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1);$$

$$\frac{\partial^k u(x, t)}{\partial x^k} \Big|_{x=-0} = (-1)^{[k/2]} \sigma_k \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial x^k} \Big|_{x=+0} \quad 0 < t < T \quad (k = 0, 1, \dots, 2n-1), \quad (3)$$

где  $f_k(x)$ ,  $g_k(x)$  ( $k = 0, \dots, n-1$ ) — заданные функции, принадлежащие пространству Гельдера  $H^{p-2k}$ .

В настоящей работе для целого  $l \geq n$  и  $0 < \gamma < 1$  решение  $u(x, t)$  уравнения (1) ищется из пространства Гельдера  $H_{x,t}^{p,p/2}(Q^\pm)$ , которое удовлетворяет начальным условиям (2) и условиям склеивания (3) с весовыми постоянными  $\sigma_k$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Терсенов С.А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985. 105 с.

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ  
ОБРАТНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ  
ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ВЕЩЕСТВА**

Соболева О.В.

*Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток  
soboleva22@mail.ru*

Целью работы является численный анализ коэффициентных обратных экстремальных задач для стационарной линейной модели переноса загрязняющего вещества в ограниченной области  $\Omega$  с липшицевой границей  $\Gamma$ , состоящей из двух частей  $\Gamma_D$  и  $\Gamma_N$ . Исходная краевая задача описывается соотношениями [1]

$$-\lambda\Delta\varphi + \mathbf{u} \cdot \text{grad}\varphi - w_0\partial\varphi/\partial z + k\varphi = f \text{ в } \Omega, \quad \varphi = \psi \text{ на } \Gamma_D, \quad \lambda(\partial\varphi/\partial n + \alpha\varphi) = \chi \text{ на } \Gamma_N. \quad (1)$$

Здесь  $\varphi$  – концентрация загрязняющего вещества (примеси),  $\lambda = \text{const} > 0$  – коэффициент диффузии,  $\mathbf{u}$  – заданный вектор скорости,  $w_0 = \text{const} \geq 0$  – величина вертикальной скорости осаждения частиц примеси,  $k \geq 0$  – величина, характеризующая распад загрязняющего вещества за счет химических реакций,  $f$  – плотность объемных источников,  $\psi$  и  $\chi$ ,  $\alpha$  – заданные на  $\Gamma_D$  и  $\Gamma_N$  функции, причем функция  $\alpha$  имеет смысл коэффициента массообмена, тогда как  $\chi$  описывает поток вещества через участок  $\Gamma_N$ .

В работе проведено численное исследование обратной экстремальной задачи, заключающейся в нахождении неизвестных параметров  $\alpha$ ,  $k$  и  $\chi$  по дополнительной информации о состоянии среды в некоторой подобласти  $Q \subset \Omega$ . На основе методов [1, 2] указанная задача формулируется как задача минимизации определенного функционала качества на решениях исходной краевой задачи. Исследуется ее разрешимость, выводятся системы оптимальности, описывающие необходимые условия экстремума, развивается численный алгоритм ее решения, основанный на дискретизации задачи (1) методом конечных разностей и методе Ньютона решения экстремальных задач. Проводится анализ результатов численных экспериментов. Разработаны и протестированы программы для решения обратной задачи, описывающей процесс переноса загрязняющих веществ в двумерной ограниченной области.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Алексеев Г.В., Терешко Д.А.* Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука. 2008. 365 с.
2. *Самарский А.А., Вабшневич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Едиториал УРСС, 2004. 480 с.

**О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА КОНТРОЛЬНОГО ОБЪЕМА  
ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ КОНВЕКЦИИ  
В ДВУХЖИДКОСТНЫХ СРЕДАХ**

Сорокин К.Э., Перепечко Ю.В., Имомназаров Х.Х.

*Институт геологии и минералогии СО РАН, Новосибирск*

*konst\_sorokin\_85@ngs.ru*

В работе рассматривается классическая задача свободной конвекции в ячейке, описанная ранее для сжимаемых жидкостей [1], в применении к сжимаемым вязким двухжидкостным средам. Проблемы математического моделирования таких двухфазных сред, как насыщенных жидкостью пористых сред, гранулированных сред, суспензий и т.д. возникают при исследовании флюидных систем земной коры и литосферы в целом. Общим подходом к описанию динамики теплопереноса в гетерофазных многокомпонентных сред является метод законов сохранения, обеспечивающий самосогласованное определение сил и потоков [2, 3]. Решение получаемых нелинейных уравнений двухжидкостной гидродинамики проводилось численно методом контрольного объема. Выбор численного алгоритма определяется необходимостью обеспечивать физическую корректность решения при произвольных пространственных и временных масштабах исследуемой системы [5]. Численное решение двухскоростных уравнений гидродинамики двухжидкостной среды с отсутствием равновесия фаз по давлению осложняется наличием второго давления в уравнениях движения фаз. Для преодоления данной трудности был адаптирован итерационный алгоритм SIMPLE для расчета полей давлений через поправки давления и скорости. Для решения сложноструктурированной СЛАУ, возникающей в уравнениях на поправки к давлениям был использован адаптированный метод переменных направлений, обеспечивший быструю сходимость итерационной процедуры для частых сеток. В докладе представлены результаты численного решения с использованием метода контрольного объема тестовых задач нестационарной конвекции в двухжидкостной системе. Результаты расчетов показывают хорошую сходимость построенного численного алгоритма.

Работа проводилась при частичной поддержке РФФИ (грант № 12-05-00625).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Perpechko Yu.V., Sorokin K.E., Imomnazarov Kh.Kh.* Modeling of the free convection in a viscous compressible fluid // Bull. Nov. Comp. Center. Ser. Math. Model. in Geoph. 2011. N 14. P. 59-64.
2. *Доровский В.Н.* Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика. 1989. N 7. С. 39–45.
3. *Доровский В.Н., Перепечко Ю.В.* Гидродинамическая модель раствора в трещиновато-пористых средах // Геолог. и геофиз. 1996. № 9. С. 123–134.
4. *Патанкар С.В.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоиздат, 1984.

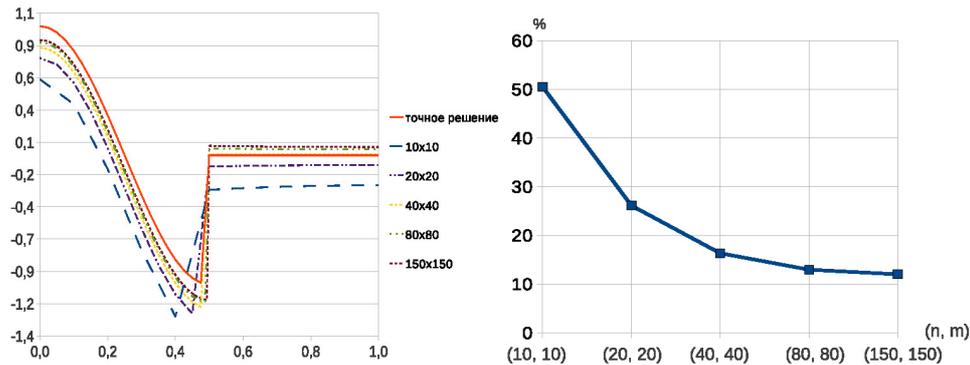
## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

Стародубцева Ю.В.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург  
starodubtsevayv@ya.ru

В некоторой прямоугольной области  $\Omega$  рассматривается движение высоковязкой неоднородной несжимаемой теплопроводной жидкости, находящейся в поле силы тяжести под воздействием некоторого внешнего теплового режима. На боковых границах области  $\Omega$  выполняется условие теплоизоляции, на верхней границе известны температура и потока тепла. На всей границе области выполняются условия непротекания и идеального скольжения для скорости движения среды. Требуется определить температурный режим на нижней границе области. Математическая модель установившегося движения жидкости описана в [1].

Для решения задачи предлагается воспользоваться методом регуляризованных разностных схем [2] с регуляризацией уравнения теплового баланса. Указываются условия согласования параметров, обеспечивающие устойчивость и сходимость схемы. На рисунках приведены результаты восстановления разрывного граничного режима для различных сеток и график зависимости относительной погрешности от параметров сетки.



Работа выполнена при финансовой поддержке Программы межрегиональных и межведомственных фундаментальных исследований Уральского отделения РАН (проект 12-С-1-1001) и поддержана РФФИ (проект 11-01-00073).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стародубцева Ю.В. Численное моделирование задачи реконструкции граничных режимов // Тез. докл. Межд. конф. "Алгоритмический анализ неустойчивых задач", посв. памяти В.К. Иванова, 31 окт. - 5 нояб. 2011 г., Екатеринбург. Екатеринбург: Изд-во Урал. фед. ун-та, 2011. С. 171-172.
2. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Едиториал УРСС, 2004.

**ДВУМЕРНОЕ ЛУЧЕВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ВЕРХНЕЙ МАНТИИ СИБИРИ  
ПО ДАННЫМ МИРНЫХ ЯДЕРНЫХ ВЗРЫВОВ**

Суворов В.Д., Мельник Е.А., Мишенькина З.Р., Павлов Е.В., В.А. Кочнев<sup>1</sup>

*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск*

<sup>1</sup>*Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН  
suvorovvd@ipgg.nsc.ru, kochnev@ict.krasn.ru*

Рассматриваются результаты численного моделирования времен пробега преломленно-рефрагированных волн, регистрирующихся в первых вступлениях по методу [1]. Используется слоисто-неоднородная модель с существенными латеральными вариациями скорости продольных волн.

Обсуждаются вопросы разделения вертикальной расслоенности и горизонтальных неоднородностей и не единственности решения обратной кинематической задачи. Приводятся примеры таких решений в зависимости от используемых входных данных при близких невязках теоретических и наблюдаемых времен пробега волн. Для сужения неоднозначности решения привлекается сейсмогравитационное моделирование [2].

Модель верхней мантии представляется в виде двух структурных этажей. Верхний, наиболее неоднородный, может быть отнесен к литосфере, мощностью до 220 км, нижний в интервале глубин 220-410 км, характеризуется слабо выраженной неоднородностью и может содержать в себе астеносферу. Вследствие мало изменяющейся скорости по глубине ее мощность по имеющимся данным оценить не удается.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Zelt C.A., Smith R.B. Seismic traveltime inversion for 2-D crustal velocity structure // Geophys. J. 1992. P. 16–34.
2. Кочнев В.А. Адаптивные методы решения обратных задач геофизики: Учеб. пособ. Красноярск: Изд-во Краснояр. гос. ун-та, 1993. 131 с.

## КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА ГИДРАТОСОДЕРЖАНИЯ В ПОРОДЕ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ОТ ЛИНЕЙНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА

Фадеева И.И.

*Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН  
FadееvaII@ipgg.nsc.ru.*

Геотермический метод поисков газогидратов заключается в измерении температуры и теплопроводности донных осадков при их нагревании линейным источником тепла (игольчатый зонд) [1]. При наличии в осадках газовых гидратов они могут диссоциировать при нагревании, что приведет к аномальным изменениям температуры, которые можно использовать для оценки гидратосодержания.

В качестве математической модели взято аналитическое решение осесимметричной задачи разложения газогидратов, основанное на решении задачи Стефана [2].

**Обратная задача.** Имеется набор данных  $y_k = y(t_k)$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ), из экспериментальных термограмм [1]. Теоретическая зависимость, полученная при решении задачи [2] является непрерывной функцией  $\mathbf{T}(\mathbf{b})$  некоторых параметров данной модели  $\mathbf{b}$ . Требуется по известному вектору  $\mathbf{y}$  оценить параметры  $\mathbf{b}$  и определить погрешности найденных оценок. Обратная задача решалась путем минимизации функционала невязки между расчетными и экспериментальными температурными кривыми:

$$J(\mathbf{b}) = (\mathbf{y} - \mathbf{T}(\mathbf{b}))^T \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{T}(\mathbf{b})) \quad (1)$$

**Результаты.** Решена обратная задача, минимизации функционала невязки между расчетными и экспериментальными температурными кривыми. При решении обратной задачи были получены векторы параметров модели  $\mathbf{b}$ , теплофизические параметры прямой задачи, эффективная тепло- и температурапроводность осадков после и до распада метан гидрата. Рассчитаны оценки массовой доли гидрата в смоделированном гидратосодержащем образце для четырех лабораторных экспериментов.

Работа была выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-05-00415-а) и междисциплинарного проекта СО РАН № 19. Автор выражает благодарность Дучкову А.А. за научное руководство.

### Список литературы

1. Дучков А.Д., Манаков А.Ю., Казанцев С.А., Пермяков М.Е., Огиенко А.Г. Экспериментальное моделирование и измерение теплопроводности пород, содержащих гидраты метана // Докл. РАН, 2006. Т. 408, № 5. С. 656-659.
2. Гольмшток А. Я., Дучков А. Д., Рощина Н. А. О возможности обнаружения донных скоплений газовых гидратов геотермическим методом. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2005. С. 130–147.

## СОВМЕЩЕННЫЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ДАННЫХ В РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Хайретдинов М.С.

*Институт вычислительной математики и математической геофизики*

*СО РАН, Новосибирск*

*bnt@rambler.ru*

Одна из основных задач мониторинга разного типа сейсмических событий [1-3] связана с восстановлением их параметров с повышенной точностью в очаге по данным регистрации сейсмических сигналов с помощью сети сейсмических станций либо малой сейсмической группы [4]. Задача оценивания неизвестных параметров источника сводится к решению нелинейной системы условных уравнений [5]:

$$\vec{t} = \vec{\eta}(X, \theta) + \vec{\varepsilon} \quad (1)$$

где  $\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_N)$  – вектор времен пробега сейсмических сигналов,  $\vec{\eta}(X, \theta)$  –  $N$ -мерный вектор вычисляемых времен пробега (теоретический годограф) или функция регрессии,  $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)^T$  – вектор невязок,  $\vec{\theta} = (x, y, z, v, t)^T$  –  $m$ -мерный вектор оцениваемых параметров,  $X = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N)$  – матрица координат датчиков (или точек излучения),  $N$  – число датчиков (или точек излучения). В качестве оцениваемых параметров выступают пространственные координаты источника  $x, y, z$ , скоростная характеристика среды  $\nu$  и время в источнике  $t$ . В ряде случаев скорость в среде является известной. При оценивании параметров пользуются сведениями о распределении ошибок  $\varepsilon_i = t_i(\vec{x}_i, \vec{\theta}) - \eta(\vec{x}_i, \vec{\theta})$ . Будем в дальнейшем предполагать, что  $\varepsilon_i$  – взаимно независимые случайные величины, имеющие распределение с нулевым средним и заданными дисперсиями:  $E\varepsilon_i = 0$ ,  $E\varepsilon_i\varepsilon_j = \sigma_i^2\delta_{ij}$ ,  $\sigma_i = \sigma(\vec{x}_i)$ ,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $i = 1, 2, \dots, N$ . В случаях затруднений с заданием дисперсий принимают их равными и получают несмещенную оценку дисперсии наблюдения с единичным весом по ходу решения задачи. Решение уравнения (1) сводится к решению обратной задачи. При этом точность решения зависит, в первую очередь, от ошибок оценивания вектора времен  $\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_N)$ , скорости  $\nu$ , шумов измерения  $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)^T$ , выбора геометрии расстановки датчиков на дневной поверхности Земли. По отношению к сейсмическим волнам, описываемым импульсными сигналами, ошибки оценивания времен могут быть вычислены в виде:

$$\sigma_\tau^2 = \frac{\tau_{\text{И}}}{2\Delta f(2E/N_0)} \quad (2)$$

Здесь  $\tau$  – длительность волнового импульса,  $\Delta f$  – ширина его спектра,  $E/N_0$  – отношение энергии импульса к спектральной плотности внешнего шума. Как следует из (3) уменьшение погрешности можно достичь за счет увеличения соотношения энергий сигнала и шума, расширения спектра частот  $\Delta f$ , занимаемого

импульсом, а также за счет сжатия волнового импульса во времени путем приведения его к  $\delta$ -образному импульсу. С учетом (2) решение задачи (1) с повышенной точностью возможно на основе совмещения алгоритмов помехоустойчивого измерения параметров сейсмических волн и оценивания параметров источника.

Актуальными в решении задачи (1) являются следующие этапы:

1) обнаружение и измерение времен вступлений волн на фоне внешних шумов с учетом (2);

2) идентификация источника;

3) расчет параметров источника;

4) отображение координат источника на цифровой карте местности.

В докладе рассматриваются алгоритмы решения задач всех перечисленных этапов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гордиенко В.А., Гордиенко Т.В. и др.* Геоакустическая локация областей подготовки землетрясений // Докл. АН. 2006. Т. 407, № 5. С. 669-672.
2. Пассивная сейсмометрия при проведении инспекции на месте: этап поиска и этап локализации события // Вестн. НЯЦ РК. Вып. 2, 2004. С. 112-117.
3. *Дробжева Я.В., Краснов В.М., Маслов А.Н.* Акустическое поле на земле при взрыве ракеты-носителя // Вестн. НЯЦ РК, 2006-2. С. 79-85.
4. *Авроров С.А., Хайретдинов М.С.* Автоматизированная процедура поточного обнаружения и идентификации сейсмических событий // Периодич. науч.-техн. журн. Национального ядерного центра республики Казахстан. 2008. Вып. 2. С. 70-75.
5. *Khairatdinov M.S., Omelchenko O.K. and others.* A computing technology to determine the parameters of the borehole bottom and medium // Bull. nov. comp. center, math. model. in geoph. 2005. Iss. 10. P. 19-26.

## ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПЬЕЗОПРОВОДНОСТИ ПРИ НЕЛИНЕЙНО УПРУГОМ РЕЖИМЕ ФИЛЬТРАЦИИ

Хужаёров Б.Х., Холияров Э.Ч., Эломов Ф.З.

*Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан*

*b.khuzhayorov@mail.ru*

Рассмотрена обратная задача идентификации коэффициента уравнения нелинейно упруго режима фильтрации по наблюдениям решения во внутренней точке области. С учетом нелинейности деформации пласта уравнение фильтрации при упругом режиме [1] в одномерном случае имеют вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \chi \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi^{\gamma-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \quad (1)$$

где  $\chi = \frac{k_0}{\mu_0 m_0 \beta}$ ,  $\varphi = \exp[-\beta(p_0 - p)]$ ,  $\alpha = a_k + \beta_f - a_\mu$ ,  $\beta = \beta_m + \beta_f$ ,  $\gamma = \alpha/\beta$ ,  $k_0$ ,  $m_0$ ,  $\mu_0$  – первоначальные (при давлении  $p = p_0 = \text{const}$ ) значения проницаемости ( $\text{м}^2$ ), пористости и вязкости ( $\text{МПа}\cdot\text{с}$ ) соответственно;  $t$  – время, с;  $x$  – линейная координата, м;  $p$  – текущее давление, МПа;  $\beta_f$  – коэффициент сверхсжимаемости жидкости,  $\text{МПа}^{-1}$ ;  $a_k$ ,  $\beta_m$ ,  $a_\mu$  – коэффициенты изменения проницаемости, пористости и вязкости соответственно,  $\text{МПа}^{-1}$ .

Для решения коэффициентной обратной задачи кроме обычных начальных и граничных условий имеем еще дополнительное условие.

Коэффициенты пьезопроводности  $\chi$  и  $\gamma$  будем искать из условия минимума функционала

$$J(\chi, \gamma) = \int_0^T [p(x_1, \xi) - z(\xi)]^2 d\xi, \quad (2)$$

где  $z(t)$  – заданная функция (дополнительное условие).

Для определения коэффициентов  $\chi$ ,  $\gamma$  из минимума функционала (2) проведена серия расчетов по симплексному методу Нелдера – Мида с различными начальными значениями  $\chi$  и  $\gamma$ . Получены результаты расчетов для определения коэффициентов  $\chi$ ,  $\gamma$  из минимума функционала (2) при различном уровне погрешностей в исходных данных. При отсутствии возмущения исходных данных, расчетные значения  $\chi$  и  $\gamma$  близки к заданным значениям  $\chi$  и  $\gamma$ . Возмущение исходных данных приводит к росту относительной ошибки определения параметров.

Для определения коэффициентов  $\chi$  и  $\gamma$  также использованы градиентные методы безусловной оптимизации. Расчеты показали, что градиентный метод дает хорошие результаты при отсутствии возмущения исходных данных, чем симплексный метод Нелдера – Мида. Однако, применение градиентного метода для возмущенных значений входных данных, дает худшие результаты.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Николаевский В.Н. К построению нелинейной теории упругого режима фильтрации жидкости и газа // ПМТФ. 1961. № 4. С. 67-76.

## МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗМЕРОВ НЕСФЕРИЧЕСКИХ НАНОЧАСТИЦ В ЛАЗЕРНОЙ ДОПЛЕРОВСКОЙ СПЕКТРОСКОПИИ

Чубов А.С.

*Институт теплофизики СО РАН им. С.С. Кутателадзе, Новосибирск  
ОАО «Институт оптико-электронных информационных технологий»,  
Новосибирск  
zooderz@gmail.com*

Лазерная доплеровская спектроскопия позволяет строить распределения по размерам взвешенных в жидкости наночастиц в диапазоне 0.001-10 мкм на основе анализа сигнала когерентного многолучевого светорассеяния и решения соответствующей обратной задачи. Измерение размерных характеристик наночастиц востребовано в физике, химии, биологии и медицине.

Большинство биологических наночастиц, таких как белки, ДНК и РНК имеют несферическую форму, что усложняет решение обратной задачи определения их размеров. Распределения размеров несферических наночастиц полученные посредством известных методов, таких как CONTIN [1], имеют низкую повторяемость и значительную погрешность. Способы решения проблемы в современных лазерных спектрометрах наночастиц основаны на использовании специальных измерительных схем, разработке новых математических моделей и, как правило, применимы для узких классов наночастиц.

В работе был развит метод решения обратной задачи определения размеров несферических наночастиц в лазерной доплеровской спектроскопии с использованием стандартной измерительной схемы. Метод основан на долговременном (порядка 0.5-1 ч) накоплении данных светорассеяния, последовательных решениях обратной задачи методом CONTIN на небольших промежутках (30-60 с) и статистической обработке результатов с возможностью фильтрации шумов, вызванных вращательными корреляциями частиц.

Тестирование метода проводилось на белках, содержащихся в моче человека. Разработанный метод решения обратной задачи определения размеров несферических наночастиц в лазерной доплеровской спектроскопии повысил точность определения размеров белков на 20-40%. Метод не требует модификации оборудования и был реализован в программном комплексе созданного в ИТ СО РАН совместно с ОАО «ИОИТ» лазерного доплеровского спектрометра наночастиц в жидкости ЛАД-075. Дальнейшие работы направлены на сокращение времени накопления данных с сохранением полученной точности вычислений.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Provencher S.W.* A constrained regularization method for inverting data represented by linear algebraic or integral equations // *Computer Physics Communications.* 1982. V. 27. P. 213-227.

**К ВЫБОРУ УПРАВЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ И ОЦЕНКЕ  
МОДИФИКАЦИЙ МЕТОДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ  
ЭВОЛЮЦИИ В ЗАДАЧЕ МИНИМИЗАЦИИ ЦЕЛЕВОЙ  
ФУНКЦИИ ЭЛЕКТРОИМПЕДАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ**

Шерина Е.С.

*Томский государственный университет, Томск  
eka.sherina@gmail.com*

Рассмотрена обратная задача электроимпедансной томографии (ЭИТ) [1], которая заключается в восстановлении неизвестного распределения электрической проводимости внутри объектов живой природы, обладающих неоднородной структурой, по измерениям силы и напряжения электрического тока на границе. Предложен эвристический численный метод решения обратной задачи ЭИТ с использованием алгоритма оптимизации, называемого дифференциальной эволюцией (ДЭ) [2].

Рассмотрены и протестированы несколько модификаций метода ДЭ в задаче поиска глобального минимума функции Розенброка, выполнена оценка скорости сходимости и эффективности алгоритма при различных управляющих параметрах метода. Проверена применимость предложенного метода к минимизации целевой функции в задаче ЭИТ с целью поиска неизвестного распределения значений электрической проводимости внутри исследуемого объекта. Обобщена статистика по численным экспериментам и выбраны оптимальные работоспособные комбинации управляющих параметров алгоритма для задачи ЭИТ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lionheart W.* Electrical impedance tomography: methods, history and appl. Manchester, 2004.
2. *Storn R.* Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces  
J. Global Optimization. 1997. N 11. P. 341–356.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕОДНОРОСТЕЙ (АРХЕОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ) В ГОРИЗОНТАЛЬНО-СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

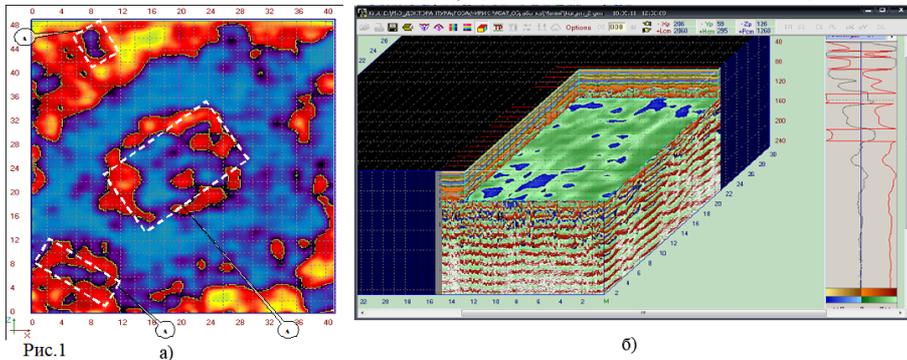
Шолпанбаев Б.Б., Бектемисова А.А.

*Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Казахский экономический университет имени Т.Рыскулова, Алматы, Казахстан*

*Sholpanbaev.Bakytgerey@yahoo.com*

В данной работе приведены результаты экспериментальных исследований по определению археологических объектов кургана с использованием георадара. Задача состоит в выявлении внутренней структуры строения кургана на основе геофизического обследования структуры грунта на предмет обнаружения древних захоронений и культовых сооружений под землей.

Применяется математическая модель прямой и обратной задачи, изученная в работе [1]. Рассматривается задача продолжения в горизонтально-слоистой среде с включением и без включения. Для решения обратной задачи используется оптимизационный метод [2] и метод конечных элементов. В результате сравнения слоев за слоем восстановленных условий на недоступной границе для среды с включением и без включения, мы получаем информацию о неоднородности [3].



На рис. 1,а показан горизонтальный разрез объекта № 1. Квадратами размечены предположительные склепы захоронения на глубине 28 см (4-6 метров). На рис. 1,б приведен 3-мерный вид объекта № 1 с применением различных фильтров.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Романов В.Г., Кабанихин С.И. Обратная задача геоэлектрики. М.: Наука, 1991. 303 с.
2. Кабанихин С.И., Исаков К.Т. Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач. Новосибирск: Изд-во НГУ. 315 с.
3. К.Т. Isakov, M.A. Shishlenin, B.B. Sholpanbaev Analysis of the results of measurements of inhomogeneities (archaeological sites) in a layered medium // The 6th Intern. conf. "Inverse Problems: Modeling and Simulation", May 21-26, 2012, Antalya (Turkey).

**ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УПРУГОГО  
ТЕЛА, СОДЕРЖАЩЕГО ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ТОНКОЕ  
ЖЕСТКОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ И ТРЕЩИНУ**

Щербаков В.В.

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск  
sherbakov87@gmail.com*

В докладе рассматривается задача оптимального управления для двумерного упругого тела с прямолинейным тонким жестким включением и трещиной. Предполагается, что тонкое жесткое включение не отслаивается [1] и имеет излом. На берегах трещины заданы краевые условия, имеющие вид равенств и неравенств и описывающие взаимное непроникание берегов трещины. В качестве функционала стоимости выбирается производная функционала энергии по длине трещины, в качестве функции управления — положение точки излома. Доказано существование решения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 10-01-00054) и ФЦП Кадры (№ П597).

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Лойгеринг Г., Хлуднев А.М.* О равновесии упругих тел, содержащих тонкие жесткие включения // Докл. АН. 2010. Т. 430, № 1. С. 47-50.

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАДАЧИ ЛОКАЦИИ  
МИКРОСЕЙСМИЧЕСКИХ СОБЫТИЙ В ОДНОРОДНОЙ  
СРЕДЕ С НЕИЗВЕСТНОЙ СКОРОСТЬЮ**

Яскевич С.В., Дучков А.А., Andersson F.  
*Новосибирский государственный университет*  
*yaskevichsv@gmail.com*

Технология гидравлического разрыва пласта (ГРП), широко распространена в нефтегазовой индустрии. Ее основная задача – создание в массиве породы трещины, или системы трещин, которые впоследствии служат для увеличения притока углеводородов. Считается, что рост трещины происходит непосредственно во время операций ГРП, и сопровождается излучением сейсмических волн, связанных с раскрытием трещины. Обработка данных микросейсмического мониторинга позволяет проводить локацию микросейсм (определение координат источников), что дает представление о геометрии образовавшейся трещины.

Нами исследуется подход в котором локация происходит одновременно с восстановлением параметров скоростной модели среды. Для этого решается обратная кинематическая задача минимизации функционала невязки между наблюдаемыми и расчетными временами прихода прямых продольных и поперечных волн. Минимизация проводилась с использованием итеративных методов локальной минимизации.

Данная задача рассматривается для вертикальной косы сейсмоприемников, помещенных в скважину (расположена вблизи скважины, где проводится ГРП). Важной характеристикой такой системы наблюдений является отношение ‘апертуры’ косы к расстоянию до микросейсмического источника:

$$\alpha = \frac{\max |z_g - z|}{r}, \quad (1)$$

где  $r$  – расстояние от косы до источника,  $z$  – глубина источника,  $z_g$  – глубины приемников в вертикальной косе.

Важной задачей является оценка точности и устойчивости определения неизвестных параметров в зависимости от системы наблюдений: положение источника  $(r, z)$ , время его срабатывания  $t_0$ , скорости продольной и поперечной волн  $(V_P, V_S)$ . В докладе показана устойчивость решения обратной задачи для класса однородных изотропных сред. Для больших значений  $\alpha$  точность определения параметров сопоставима с точностью традиционной сейсморазведочной постановки (известное  $t_0$ ).

Работа проводилась при частичной поддержке Интеграционного проекта СО РАН № 127 и Шведского фонда по международному сотрудничеству в науке и высшем образовании (the work was partly supported by the Swedish Foundation for International Cooperation in Research and Higher Education).

## Содержание

<i>Antontsev S.N., Shmarev S.I.</i> Doubly degenerate parabolic equations with nonstandard growth: existence, localization and blow-up .....	1
<i>Begmatov A.H.</i> Weakly ill-posed integral geometry problems on a plane and in a three-dimensional space .....	2
<i>Bondarenko A.N., Gunkin A.Y.</i> Comparative analysis of numerical methods for calculating critical parameters of fractal lattices .....	3
<i>Bukhgeym A.L.</i> Inverse scattering problem .....	4
<i>Y. S. Gasimov</i> On a shape design problem for one spectral functional .....	5
<i>Kazantsev S.G.</i> 3D vector tomography and singular value decomposition .....	7
<i>Lavrenteva O.M., Smagin I., Zabaranin M., Nir A.</i> Boundary integral simulations of deformation of viscous and viscoplastic drops in linear flow .....	8
<i>Lukyanenko D.V.</i> Some features of using parallel computing for solving multidimensional ill-posed problems .....	9
<i>Romanov V.G.</i> 2D and 3D inverse problems for viscoelasticity equations .....	10
<i>Shishlenin M.A.</i> Inverse source problem for wave equation .....	11
<i>Tordeux S.</i> Non-reflecting boundary condition on ellipsoidal boundary .....	12
<i>Zotov L.V.</i> The methods of reconstruction of the Chandler wobble excitation ....	13
<i>Аблабеков Б.С.</i> Обратные задачи для уравнения Буссинеска – Лява и связанные с ними нагруженные уравнения .....	14
<i>Алексеев Г.В.</i> Оптимизационные методы в обратных задачах акустики и электромагнетизма .....	15
<i>Аниконов Ю.Е.</i> Некоторые вопросы теории и приложений обратных и некорректных задач .....	16
<i>Антипин В.И.</i> О свойствах решений одного операторно-дифференциального уравнения смешанного типа .....	17
<i>Арбузов Э.В.</i> О свойствах интегрального оператора Коши с осциллирующим ядром .....	18
<i>Асанов Р.А.</i> О решении одного класса линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода .....	19
<i>Астракова А.С.</i> Определение свойств трещиновато-пористой среды на основе решения обратной задачи с использованием модели фильтрации вязкопластической жидкости .....	20
<i>Ахманова Д.М., Космакова М.Т., Петерс С.Н.</i> О сопряженной задаче для уравнения теплопроводности в области с подвижной границей .....	21
<i>Аюнов Д.Е., Скуридина В.В.</i> Параллельная реализация алгоритма расчета влияния рельефа на оценку теплового потока Земли .....	23
<i>Баландин А.Л.</i> Метод совместного обращения 3D скалярного и векторного лучевых преобразований .....	24
<i>Балтабаева Р. Б.</i> Численное моделирование и визуализация одной математической модели соле- влаго переноса в системе MATLAB .....	25

<i>Барцев С.И., Дегерменджи А.Г., РАН Федотов А.М., Медведев С.Б., Пестунов А.И., Пестунов И.А.</i> О нестандартном поведении минимальной модели динамики биосферы .....	27
<i>Бегматов А.Х., Джайков Г.М.</i> Восстановление функции по сферическим средним на плоскости и в трехмерном пространстве .....	29
<i>Бегматов А.Х., Илюхина А.В.</i> Задача интегральной геометрии на конических поверхностях со специальными весовыми функциями .....	30
<i>Бегматов А.Х., Пиримбетов А.О., Сейдуллаев А.К.</i> Две слабо некорректные задачи интегральной геометрии в полосе .....	31
<i>Белоносов В.С.</i> Модифицированный метод Крылова – Боголюбова и его приложения .....	32
<i>Богульский И.О., Богульская Н.А., Волчков Ю.М.</i> Об одной задаче оптимизации технологических параметров движения гранулированной среды в вибрирующих сосудах .....	34
<i>Бондаренко А.Н., Дедок В.А., Козинкин Л.А., Токарев М.П.</i> Численное решение обратной задачи восстановления дискретных рассеивающих центров по набору проекций .....	35
<i>Бондаренко А.Н., Иванов В.В.</i> Мультифрактальный анализ с использованием метода максимумов модулей вейвлет-преобразования .....	36
<i>Бондаренко А.Н., Иващенко Д.С.</i> О применении метода конечных элементов в задачах теории аномальной диффузии .....	37
<i>Боричевская А.Г.</i> Об одной обратной задаче для параболического уравнения с данными Коши на части боковой поверхности цилиндра .....	38
<i>Бризицкий Р.В., Згонник А.С.</i> О свойствах решений экстремальных задач для уравнений Максвелла .....	39
<i>Булатов М.В., Будникова О.С.</i> Многошаговые методы для численного решения интегро-алгебраических уравнений .....	40
<i>Вахитов И.С.</i> Численный анализ задачи идентификации старшего коэффициента уравнения конвекции – диффузии – реакции .....	41
<i>Воеводин А.Ф., Никифоровская В.С.</i> Задачи идентификации моделей гидравлики открытых русел и трубопроводного транспорта .....	42
<i>Воронин К.В.</i> Схемы расщепления в смешанном методе конечных элементов для решения задач теплопереноса .....	43
<i>Гадильшина В.Р.</i> Вычислительный алгоритм решения обратной коэффициентной задачи тепломассопереноса в пористых средах .....	44
<i>Гилев К.В., Юркин М.А., Мальцев В.П.</i> Численный метод решения обратной задачи светорассеяния для характеристики эритроцитов человека .....	45
<i>Главный В.Г., Двойнишников С.В., Пененко А.В.</i> О статистической оценке ошибки оператора СЛАУ в задаче калибровки лазерного толщиномера горячего проката .....	46
<i>Грибанова Е.И.</i> Конечномерная аппроксимация задачи реконструкции граничного управления в гиперболических системах .....	47

<i>Грицевич И.В., Нетелев А.В.</i> Определение характеристик разлагающихся материалов при наличии процессов термохимической кинетики .....	48
<i>Дементьева Е.В., Карпова Е.Д.</i> Параллельная реализация задачи о граничной функции для уравнений мелкой воды .....	50
<i>Дергач П.А.</i> Обработка данных пассивного сейсмического мониторинга в районе эпицентра чуйского землетрясения .....	51
<i>Деревцов Е.Ю.</i> Особенности применения численных методов в задачах томографии 2-тензорных полей .....	52
<i>Джениалиев М.Т., Иманбердиев К.Б., Айменова К.</i> О некорректной задаче для бигармонического уравнения .....	53
<i>Джениалиев М.Т., Иманбердиев К.Б., Рамазанов М.И., Жанадил А.Т.</i> Обратная задача по стабилизации решения нагруженного уравнения теплопроводности	54
<i>Дугаров Г.А.</i> Прямая и обратная задачи о распространении волн в эффективной модели изотропной среды с системой параллельных трещин ...	55
<i>Елеуов А. А., Урмашев Б.А.</i> Об одном методе восстановления пяти диагональных симметричных матриц по спектральным данным .....	56
<i>Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х., Коробов П.В.</i> Стационарные законы сохранения в гидродинамике двухскоростных сред с одним давлением .....	57
<i>Желтяков Н.А.</i> Реализация конечно-объемного метода типа Годунова для модели нелинейной упругости на неструктурированных сетках .....	58
<i>Жидков А.А., Калинин А.В., Сумин М.И.</i> Численные методы решения прямых и обратных задач атмосферного электричества .....	59
<i>Зятыков Н.Ю., Айзенберг А.А., Айзенберг А.М., Романенко А.А., Андерссон Ф.</i> Моделирование каскадной дифракции в слоях с “затеняющими” границами в терминах матричных операторов распространения-поглощения .....	60
<i>Имомназаров Х.Х.</i> Некоторые совмещенные прямые и обратные задачи динамики двухфазных сред .....	61
<i>Имомназаров Х.Х., Янгибоев З.Ш.</i> Об одном способе регуляризирующего алгоритма для одномерных обратных динамических задач пороупругости ...	62
<i>Кабанихин С.И., Маринин И.В., Криворотько О.И., Зятыков Н.Ю., Карас А., Хидашели Д.</i> 3D-моделирование волн цунами и методы решения обратной задачи определения источника цунами .....	63
<i>Кабанихин С.И., Нурсеитов Д.Б., Нурсеитова А.Т., Асманова Н.А.</i> Анализ некорректности и численных методов решения нелинейной обратной задачи фармакокинетики .....	64
<i>Карчевский А.Л., Дучков А.А.</i> Численное решение одной обратной задачи геотермики .....	66
<i>Кобрунов А.И.</i> Проектирование на пространство гармонических функций ...	68
<i>Ковыркина О.А., Плетнев А.С.</i> Сравнение теории и эксперимента в задаче о волновых течениях, возникающих при разрушении плотины на скачке площади сечения прямоугольного канала .....	69

<i>Конохова А.И., Юркин М.А., Москаленский А.Е., Мальцев В.П.</i>	
Характеризация микрочастиц крови по индикатрисе светорассеяния методом глобальной оптимизации .....	70
<i>Косьянов А.Н.</i> Определение сигнала и коэффициентов отражения в свёрточной модели адаптивным методом .....	71
<i>Кутерин Ф.А., Сумин М.И.</i> Параметрическая двойственная итеративная регуляризация теоремы Куна – Таккера .....	72
<i>Кутненко А.Н.</i> Вариационный метод усвоения данных в модели конвекции – диффузии тепла в атмосфере .....	73
<i>Лобанов А.В.</i> Задаче построения нерассеивающих оболочек для уравнений анизотропной акустики .....	74
<i>Луценко А.В.</i> Численный анализ задачи идентификации для уравнения конвекции – диффузии – реакции .....	75
<i>Мальцева С.В.</i> Восстановление параметров среды с линейной вдоль выделенных направлений скоростью по кинематическим данным .....	76
<i>Марков В.Г.</i> О некоторых свойствах задачи Штурма – Лиувилля с незнакоопределенной весовой функцией .....	77
<i>Марчук Ан.Г.</i> Решение прямых и обратных задач, связанных с цунами .....	78
<i>Меграбов А.Г.</i> Группы эквивалентности, законы сохранения и другие формулы в дифференциальной геометрии и математической физике .....	79
<i>Митченко Д.А.</i> Исследование релеевских волн и упругого волновода в слоистой среде .....	81
<i>Михайлов Г.А.</i> Асимптотические оценки переноса излучения через стохастическую среду и восстановление параметров осредненной радиационной модели .....	82
<i>Михайлов Г.А., Рогазинский С.В.</i> Вероятностная модель многочастичной эволюции и параметрическая оценка решения нелинейного кинетического уравнения .....	83
<i>Михайлова Д.О.</i> Восстановление статическим методом распределенных и граничных управлений с результатами численного моделирования .....	85
<i>Москаленский А.Е., Конохова А.И., Юркин М.А., Некрасов В.М., Чернышев А.В., Мальцев В.П.</i> Определение характеристик тромбоцитов крови человека в модели спуснутого сфероида по индикатрисам светорассеяния, измеренным с помощью сканирующего проточного цитометра .....	86
<i>Мурашкин Е.В.</i> Об обратной задаче в теории больших упругоползучих деформаций .....	87
<i>Назарова Л.А., Назаров Л.А.</i> Обратные задачи геомеханики для реологических моделей массивов горных пород .....	88
<i>Никитин В.В., Дучков А.А., Андерссон Ф.</i> Регуляризация сейсмических данных при помощи разложения по гауссовым волновым пакетам .....	89
<i>Николаев Н.Н.</i> Разрешимость обратных задач для одного уравнения третьего порядка .....	90

<i>Оборнев И.Е., Родионов Е.А.</i> Численные методы решения многомерных обратных задач геоэлектрики с применением нейросетевых технологий .....	91
<i>Оборнев И.Е., Родионов Е.А.</i> Численные методы оценки степени устойчивости обратных задач геоэлектрики в конечно-параметрических классах сред .....	92
<i>Павлов С.С.</i> Нелинейные обратные задачи для многомерных гиперболических уравнений с интегральным переопределением .....	93
<i>Панов А.В.</i> Ядро основных алгебр Ли системы уравнений механики двухфазной среды в трехмерном случае .....	94
<i>Пененко А.В.</i> Численные алгоритмы решения и исследования обратной коэффициентной задачи теплопроводности слоистой среды по данным граничных измерений .....	95
<i>Перевалова Е.Г.</i> Об одной обратной задаче волновой гидродинамики .....	96
<i>Пикалов В.В.</i> Обратные задачи в обработке изображений .....	97
<i>Полякова А.П.</i> Сингулярное разложение оператора нормального преобразования радона векторного поля, заданного в единичном шаре .....	98
<i>Попов Н.С.</i> Разрешимость краевой задачи для псевдогиперболического уравнения с нелокальными интегральными условиями .....	99
<i>Попов С.В.</i> Краевые задачи для прямо и обратно параболических уравнений	100
<i>Прокотьев А.В.</i> Разрешимость нелинейных обратных задач для эллипτικο-параболических уравнений .....	101
<i>Расторгуева Е.В.</i> Об одной интегральной модели развивающихся систем ...	102
<i>Рахметуллина С.Ж., Пененко А.В.</i> Разработка математического обеспечения автоматизированной системы экологического мониторинга на основе решения обратной задачи локализации источника загрязнения атмосферного воздуха	103
<i>Рыженков А.В.</i> Декодирование нормы накопления методами системной динамики и математической статистики .....	104
<i>Сазандрашвили А.Ю.</i> Обратные экстремальные задачи для линейной нестационарной модели переноса вещества .....	106
<i>Сатторов Э.Н., Эрмаматова М.Э.</i> Задача Коши для обобщенной системы Коши – Римана .....	107
<i>Сатыбаев А.Дж., Калдыбаева Г.А.</i> Численная реализация одномерной прямой и обратной задачи термоупругости с мгновенным источником .....	109
<i>Сафиуллова Р.Р.</i> О разрешимости некоторой обратной задачи для гиперболического уравнения .....	110
<i>Седилков А.А.</i> Обратная спектральная задача для операторов Штурма – Лиувилля с разрывными коэффициентами .....	111
<i>Синяевский А.Г.</i> О контактных задачах для итерированного уравнения теплопроводности .....	112
<i>Соболева О.В.</i> Численное исследование коэффициентных обратных экстремальных задач для стационарной линейной модели переноса вещества .....	113

<i>Сорокин К.Э., Перепечко Ю.В., Имомназаров Х.Х.</i> О применении метода контрольного объема для моделирования конвекции в двухжидкостных средах .....	114
<i>Стародубцева Ю.В.</i> Численное моделирование обратной граничной задачи .	115
<i>Суворов В.Д., Мельник Е.А., Мишенькина З.Р., Павлов Е.В., Кочнев В.А.</i> Двумерное лучевое моделирование верхней мантии Сибири по данным мирных ядерных взрывов .....	116
<i>Фадеева И.И.</i> Количественная оценка гидратосодержания в породе по измерениям температурного поля от линейного источника тепла .....	117
<i>Хайретдинов М.С.</i> Совмещенные методы обработки сейсмических данных в решении обратных задач .....	118
<i>Хужаёров Б.Х., Холмяров Э.Ч., Эломов Ф.З.</i> Определения коэффициентов пьезопроводности при нелинейно упругом режиме фильтрации .....	120
<i>Чубов А.С.</i> Метод решения обратной задачи определения размеров несферических наночастиц в лазерной доплеровской спектроскопии .....	121
<i>Шерина Е.С.</i> К выбору управляющих параметров и оценке модификаций метода дифференциальной эволюции в задаче минимизации целевой функции электроимпедансной томографии .....	122
<i>Шолтанбаев Б.Б., Бектемисова А.А.</i> Определение неоднородностей (археологических объектов) в горизонтально-слоистой среде .....	123
<i>Щербаков В.В.</i> Задача оптимального управления для упругого тела, содержащего прямолинейное тонкое жесткое включение и трещину .....	124
<i>Яскевич С.В., Дучков А.А., Andersson F.</i> Об устойчивости задачи локации микросейсмических событий в однородной среде с неизвестной скоростью ..	125